1 Verhulst-Gleichung

Um 1844[1] schlug Pierre François Verhulst[2] eine einfache Gleichung vor, die die Populationsentwicklung einer Tierart in einem umgrenzten Lebensraum von einem auf das nächste Jahr simuliert. Es handelt sich hier um eine iterative Gleichung, die jeweils von einem Jahr auf das nächste die Entwicklung der betrachteten Population beschreibt. Die Verhulst-Gleichung, die auch „diskrete logistische Gleichung“ bzw. vereinfacht „logistische Gleichung“ genannt wird, lautet (vgl. Strunk & Schiepek, 2006, S. 61ff.):

$$x_{n+1} = rx_n(1-x_n). \text{ mit } 0 \leq x \leq 1$$

x ist die Größe der Population
r sind die Lebensbedingungen im Ökosystem

Die Größe der Population der Tierart im folgenden Jahr x_{n+1} ergibt sich aus einer Konstanten für die Lebensbedingungen r und der Kenntnis der Populationsgröße des Ausgangsjahres x_n. Definiert ist die Gleichung für Werte zwischen Null und Eins, wobei Eins einer 100%igen Auslastung des Ökosystems entspricht. Mehr als 100% verträgt das Ökosystem nicht. Selbst bei einer 100%igen Auslastung stirbt im nächsten Jahr die Population aus, da sämtliche Ressourcen des Ökosystems aufgebraucht wurden.

Auf diese Weise lässt sich z.B. die Population des „Großen Schwammspinners“, eines Falters (vgl. Briggs & Peat, 1990, S. 75), für ein beliebiges Jahr aus der Zahl der Falter im Vorjahr berechnen. Obwohl diese Gleichung mathematisch nicht besonders kompliziert ist, zeigen sich für verschiedene Lebensbedingungen *r* höchst unterschiedliche und zum Teil komplexe Entwicklungen der Anzahl der Falter.

Berechnen Sie in Excel die Entwicklung der Falter für beliebige Startwerte (*x* muss zwischen Null und Eins liegen). Berechnen Sie dabei mindestens 500 Jahre oder mehr. Lassen Sie mindestens 10 Nachkomma-Stellen anzeigen. **A) Beschreiben Sie die beobachtete Entwicklung für die folgenden Lebensbedingungen**:

1) r = 0,9	2) r = 2,7	3) r = 2,9
4) r = 3,2	5) r = 3,5	6) r = 3,83
7) r = 3,55	8) r = 3,999	9) r = 3,56900

Wählen Sie einen beliebigen Startwert (*x* muss zwischen Null und Eins liegen) und r = 3,99. Rechnen Sie nun bitte einmal mit $x_{n+1} = rx_n(1-x_n)$ und einmal mit $x_{n+1} = rx_n - rx_n^2$ mehrere hundert Jahre aus. **B) Welche Berechnung stimmt? D.h., welche Prognose für die Zahl der Schwammspinner ist die richtige?**

Die neun Ergebnis-Beschreibungen aus A) und die Antwort aus B) (nicht die Excel-Mappen) per Mail oder als Papierversion zur nächsten Sitzung abgeben.

Literatur

Briggs, J. & Peat, F. D. 1990. ***Die Entdeckung des Chaos***. München: Hanser.

Peitgen, H.-O., Jürgens, H. & Saupe, D. 1992. ***Bausteine des Chaos. Fraktale***. Berlin: Springer; Klett-Cotta.

Strunk, G. & Schiepek, G. 2006. ***Systemische Psychologie. Eine Einführung in die komplexen Grundlagen menschlichen Verhaltens***. Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag.

[1] Zwei ausführliche Untersuchungen erschienen in den Mémoires de l'Académie Royale de Belgique, 1844 und 1847; (Anmerkung nach Peitgen, Jürgens & Saupe, 1992, S. 54).
[2] 1804 bis 1849