

Organisierte Komplexität

**Mikroprozess-Analysen der Interaktionsdynamik zweier
Psychotherapien mit den Methoden der nichtlinearen
Zeitreihenanalyse**

Inaugural-Dissertation
in der Fakultät Psychologie
der Otto-Friedrich-Universität Bamberg

vorgelegt von

Guido Strunk

aus

Dorsten

Bamberg, den 11.06.2004

Tag der mündlichen Prüfung: 19.01.2005

Dekan: Univ. Prof. Dr. Max Peter Baumann

Erstgutachter: Apl. Prof. Dr. Günter Schiepek

Zweitgutachter: Apl. Prof. Dr. Harald Schaub

8.2.5 Chaotizität

Es waren die Arbeiten von Ruelle und Takens (1971), die die Hoffnung nährten Chaos über die Identifikation fraktaler Strukturen im Phasenraum nachweisen zu können. Die von ihnen als seltsame Attraktoren bezeichneten Phasenraumportraits chaotischer Prozesse sind in der Regel tatsächlich von fraktaler Struktur (auf Einschränkungen und Ausnahmen von der Regel wurde oben bereits hingewiesen; vgl. Abbildung 53, S. 158). Methodisch folgte auf eine, mit der Einführung der Korrelationsdimension (Grassberger & Procaccia 1983a, 1983b) einsetzende Euphorie bald schon die Ernüchterung. Nur selten kann allein über ein Korrelationsintegral die fraktale Struktur eines Attraktors zweifelsfrei belegt werden. Selbst der bekanntermaßen chaotische Attraktor des Lorenzsystems liegt mit einer Dimensionalität von 2,06 (z.B. Argyris & Andreadis 1998b) verdächtig nahe an einer nicht fraktalen Dimensionalität von 2,0. Das einseitige Hoffen auf die Ermittlung nicht ganzzahliger Dimensionalitätswerte um damit den Beleg für Chaos zu erbringen, wird durch die Ungenauigkeit des Berechnungsverfahrens unterstützt. Hier können kleine Verschiebungen im Skalierungsbereich bereits genügen, um geringfügig andere Ergebnisse zu erhalten, so dass sich selbst bei eindeutig nicht-chaotischen Datensätzen mitunter keine ganzen Zahlen ergeben. Obwohl das Korrelationsintegral eine unbestritten gute Möglichkeit dafür darstellt die Komplexität einer Dynamik zu quantifizieren, ist es genau genommen nicht in der Lage chaotische von nicht chaotischen Prozessen zu unterscheiden. Dies liegt unter anderem auch darin begründet, dass Chaos eben nicht eindeutig an die Komplexität (so wie sie über ein D_2 definiert ist) gekoppelt ist. So kann ein System aus mehreren gekoppelten Oszillatoren ein hoch komplexes, hoch dimensionales torisches Verhalten zeigen, ohne chaotisch zu sein, wohingegen der viel weniger komplexes Verhalten generierende Lorenz-Attraktor irreguläre chaotische Strukturen hervorbringt. Der zwingende Nachweis von Chaos kann von Methoden zur Dimensionalitätsanalyse nicht erbracht werden. Er ist vielmehr daran gebunden den Schmetterlingseffekt, d.h. die exponentielle Divergenz nahe benachbarter Trajektorien in einem System sichtbar zu machen. Dies leisten bestimmte Analysemethoden, die im Folgenden näher beschrieben werden sollen.

Die Kolmogorov-Sinai-Entropie liefert erste Hinweise auf Chaos

Als eine Möglichkeit zur Quantifizierung des Schmetterlingseffektes soll hier zunächst die *Kolmogorov-Sinai-Entropie* vorgestellt werden, deren Grundannahmen oben schon in anderem Zusammenhang beschrieben wurden (vgl. auch S. 359).

Zur Bestimmung der Kolmogorov-Sinai-Entropie wird der Wertebereich einer Dynamik in diskrete, disjunkte Abschnitte eingeteilt. Jeder dieser Abschnitte der Breite ε , repräsentiert also einen Teil des Wertebereiches und wird mit s_i bezeichnet. Nun lassen sich Wahrscheinlichkeiten dafür bestimmen, welche s_i eine Trajektorie einnimmt, nachdem sie sich vorher in einem als Referenzabschnitt gewählten s_0 befand und welchen Ort sie danach wohl einnehmen wird. Bei nicht chaotischen Systemen, wird die Systemdynamik bei ähnlichen Ausgangsbedingungen immer wieder das gleiche Verhaltensmuster zeigen. D.h., dass auf jedes s_0 immer ein bestimmtes s_i und darauf ein bestimmtes s_{i+1} folgt, sodass die Wahrscheinlichkeit, dieses Verhalten bei gegebenem s_0 beobachten zu können, nahezu Eins ist.

Die Entropie einer solchen Abfolge von Wertebereichen ist nach der Shannon-schen Informationsdefinition (vgl. auch Gleichung 48, S. 359) gegeben durch:

Gleichung 60:
Entropie einer Ab-
folge von Werten

$$I_{s_0} = - \sum_{j=1}^J P_j(s_0 \rightarrow s_i \rightarrow s_{i+1} \rightarrow \dots) \log P_j(s_0 \rightarrow s_i \rightarrow s_{i+1} \rightarrow \dots).$$

Nun hängen die Ergebnisse aus der genannten Gleichung von verschiedenen Faktoren ab, nämlich von der Länge der Kette ($s_0 \rightarrow s_i \rightarrow s_{i+1} \rightarrow \dots$), die wiederum vom gewählten Zeitintervall Δt bestimmt wird. Die Wahrscheinlichkeiten P_j , werden unter anderem auch von der mit ε gegebenen Breite der s_i beeinflusst. Zudem soll das angestrebte Entropiemaß nicht nur für ein s_0 sondern für alle möglichen Referenzpunkte Gültigkeit besitzen. Ein Maß, das diese Bedingungen berücksichtigt, ist die Kolmogorov-Sinai-Entropie, für welche die folgende Gleichung angeben werden kann:

Gleichung 61:
Kolmogorov-Sinai-
Entropie

$$K = - \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N \Delta t} \sum_{s_0=1}^N \sum_{j=1}^{J_{s_0}} P_j(s_0 \rightarrow s_i \rightarrow s_{i+1} \rightarrow \dots) \log P_j(s_0 \rightarrow s_i \rightarrow s_{i+1} \rightarrow \dots).$$

Wie aus der Gleichung ersichtlich ergibt sich die Kolmogorov-Sinai-Entropie als Grenzwert von insgesamt drei Bedingungen: Zum einen soll der beobachtete Zeitraum klein werden, zum anderen soll die Größe der Abschnitte klein sowie die Länge der Zeitreihe möglichst groß werden. Ausgehend von jedem s_0 kann es verschiedene „Wege durch den Phasenraum“ geben, die sich als unterschiedliche Abfolgen ($s_0 \rightarrow s_i \rightarrow s_{i+1} \rightarrow \dots$) beschreiben lassen. Die Summe der Wahrscheinlichkeiten für alle auf ein gegebenes s_0 folgenden Wege muss sich dabei zu Eins addieren lassen.

Ist ein Prozess nun vollständig determiniert, so gibt es von jedem s_0 ausgehend immer nur eine ganz bestimmte Möglichkeit der weiteren Abfolge. Die Wahrscheinlichkeit dieser einen Abfolge ist damit für alle s_0 jeweils:

$$P_{s_0}(s_0 \rightarrow s_i \rightarrow s_{i+1} \rightarrow \dots) = 1.$$

Da der Logarithmus aus Eins Null ist, folgt aus Gleichung 61 sofort eine Entropie von Null für eine solcherart reguläre und vorhersehbare Dynamik. Für chaotische Prozesse sind hingegen ausgehend von s_0 mehrere ($s_0 \rightarrow s_i \rightarrow s_{i+1} \rightarrow \dots$) wahrscheinlich. Je nach Stärke des Schmetterlingseffektes machen auch kleinste durch ε tolerierte Unterschiede innerhalb der Grenzen von s_0 mehrere Wege durch den Attraktor möglich. Allerdings bleiben die Möglichkeiten begrenzt, da auch chaotische Prozesse deterministischen Gesetzen folgen und daher eine Ordnung in den Attraktorstrukturen vorhanden ist. Geht die Entropie nach der beschriebenen Gleichung bei kleiner werdendem ε nicht gegen unendlich sondern gegen eine endliche Zahl größer Null, so handelt es sich um eine chaotische Dynamik. Wächst sie hingegen bei Verkleinerung von ε immer weiter an, so handelt es sich um einen Zufallsprozess (maximale Entropie). Die folgende Abbildung 106 verdeutlicht die drei Fälle (Regularität, Chaos, Zufall) im Rahmen einer schematischen Darstellung.

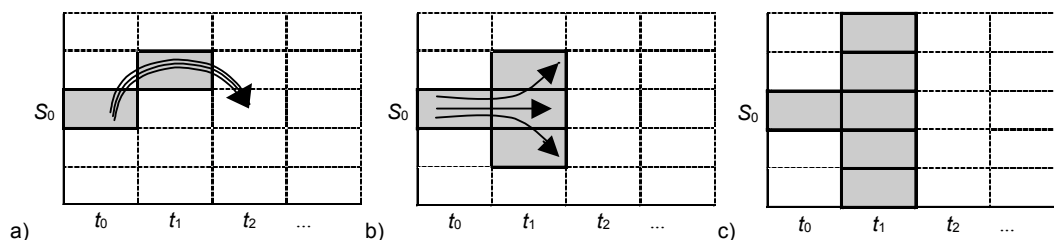


Abbildung 106: Schematische Darstellung der Bedeutung der K-Entropie

Die Abbildung zeigt in a) eine reguläre Dynamik mit vollständiger Vorhersehbarkeit. Der Abstand der Trajektorien zueinander verändert sich nicht. Die am Ausgangspunkt (Zelle S_0) beieinander liegenden Trajektorien bleiben auch im Laufe der weiteren Entwicklung zusammen ($K = 0$). Pro Zeiteinheit kommt immer nur eine Zelle als Aufenthaltsort einer Trajektorie in Frage. (b) Chaotische Dynamik: Die in der Ausgangszelle S_0 beieinander liegenden Trajektorien laufen exponentiell auseinander ($K > 0$). Die Wahrscheinlichkeit des Aufenthalts in den verfügbaren Zellen hängt von K ab. (c) Zufallsprozess: Ausgehend von Zelle S_0 können sich die Trajektorien bereits zum nächsten Zeitabschnitt in allen verfügbaren Zellen des Wertebereiches befinden. Der Aufenthaltsort der Trajektorien ist für alle Zellen gleichwahrscheinlich (Abbildung nach Schuster 1989a, S. 112; vgl. Schiepek & Strunk 1994).

Die Größe von K kann als Maß für die Stärke der Chaotizität interpretiert werden, wobei gilt:

- Geordnetes, reguläres Systemverhalten: $K = 0$.
- Deterministisch chaotisches Systemverhalten: $0 < K < \infty$.
- Stochastisches Systemverhalten: $K \rightarrow \infty$.

Anschaulicher, als der Wert von K ist die so genannte Fehler-Verdoppelungs-Zeit T_2 , die angibt, wie lange es dauert, bis ein beliebiger Messfehler sich durch den „Schmetterlingseffekt“ verdoppelt. Die Fehler-Verdoppelungs-Zeit lässt sich aus K bestimmen durch (vgl. Raidl 1998, S. 47):

Gleichung 62:
Fehler-Verdoppelungs-Zeit

$$T_2 = \frac{\ln 2}{K2}.$$

Nun ist die Bestimmung von K in der oben beschriebenen Weise für hohe Einbettungsdimensionen kaum noch möglich. Wird der Wertebereich einer Dynamik z.B. nur in 15 Abschnitte eingeteilt, so kann ausgehend von einem s_0 in einem zweidimensionalen Fall als nächster Abschnitt einer von 15 mal 15 Möglichkeiten gewählt werden. Wird noch ein weiteres s_i betrachtet, so ergeben sich gar

$$\left((15)^2 \right)^2 = 50.625 \text{ mögliche Abfolgen.}$$

Im dreidimensionalen Fall, bei nur 2 Folgepunkten auf s_0 sind es dann schon

$$\left((15)^3 \right)^2 = 11.390.625 \text{ mögliche Verläufe.}$$

Allgemein ergeben sich für 15 Abschnitte:

$$\left((15)^m \right)^2 = 15^{2m} \text{ mögliche Verläufe bei nur zwei Folgepunkten.}$$

Dies macht bei einer regulären Dynamik kein Problem, da nur jeweils eine mögliche Abfolge auftreten wird. Im Falle eines chaotischen Prozesses wächst die Anzahl der tatsächlich realisierten Abfolgen jedoch schnell an, was zu gigantischen Rechenzeiten auch an schnellen Computern führt, sobald mehr als $m = 4$ Dimensionen beachtet werden müssen. Zufällige Dynamiken realisieren sogar alle möglichen Abfolgen für jede gewählte Einbettungsdimension, während für chaotische Attraktoren ab einer optimalen Einbettungsdimension zumindest eine Sättigung beobachtbar sein sollten.

Die K2-Entropie kann über das Korrelationsintegral bestimmt werden

Eine praktikablere Methode zur Bestimmung der Entropie eines Prozesses bietet daher die Möglichkeit die K-Entropie aus dem Korrelationsintegral nach Grassberger und Procaccia (Grassberger & Procaccia 1983a, 1983b) zu schätzen (vgl. Gleichung 57, S. 366). Diese so genannte K2-Entropie ergibt sich aus der Veränderung des Korrelationsintegrals für aufeinanderfolgende Einbettungsdimensionen. Allerdings muss dieser Wert auf die Größe der Samplingzeit bezogen werden, da diese anschaulich dem ε in diesem empirisch begründeten Vorgehen entspricht:

Gleichung 63:
K2-Entropie

$$K2(l, m) = \frac{1}{T_{sample}} \ln \left(\frac{C_m(l)}{C_{m+1}(l)} \right).$$

Für wachsende Einbettungen und kleiner werdende l nähert sich der $K2(l, m)$ -Wert an ein konstantes K2 an:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{l \rightarrow 0} K2(l, m) \approx K2.$$

Um $K2(l, m)$ in Abhängigkeit von m zu bestimmen, muss zunächst

$$K2(m) = \lim_{l \rightarrow 0} \ln \left(\frac{C_m(l)}{C_{m+1}(l)} \right),$$

für jedes m ermittelt werden, wobei hier vereinfachend die Samplingzeit auf Eins gesetzt wurde. Da nach Logarithmenregeln gilt:

$$\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b,$$

kann für die Gleichung auch geschrieben werden:

Gleichung 64:
K2-Entropie

$$K2(m) = \lim_{l \rightarrow 0} \ln C_m(l) - \ln C_{m+1}(l).$$

Wird durch die doppelt logarithmische Darstellung von $C(l)$ vs. l eine Ausgleichsgerade gelegt, so findet sich für den Schnittpunkt dieser Gerade mit der Ordinate:

$$\lim_{l \rightarrow 0} \ln C_m(l).$$

Die Differenz der Ordinatenabschnitte bei m und $m+1$ bildet eine Schätzung für $K_2(m)$ für jedes m . Bei steigendem m verringert sich ab $m = D_2$ der Unterschied zwischen den beiden Ordinatenabschnitten nicht mehr. Dieser Sättigungswert kann als Schätzung für K_2 gelten.

Frank et al. (1993) zeigen aber nun, dass auch bei Einbettungsdimensionen in der Größenordnung von 10 häufig keine Sättigung des K_2 auf einen Wert festgestellt werden kann. Dies folgt sofort daraus, dass die mittlere euklidische Distanz zwischen Punkten im Phasenraum, wie sie im Korrelationsintegral ermittelt wird mit der Quadratwurzel von m wächst. Je höher die Einbettungsdimension, desto höher sind die Distanzen zwischen den Punkten auf dem Attraktor. Frank et al. (1993) führen aus, dass eine Reskalierung aller benutzten l mit

$$\frac{1}{\sqrt{m}}$$

äquivalent ist zu einer Verschiebung der doppelt logarithmischen Darstellung von

$$C(l) \text{ vs. } l \text{ um } \frac{1}{2} \log m \text{ nach links.}$$

An Stelle von $\log l$, wird dann

Gleichung 65:
Reskalierung

$$\log l - \frac{1}{2} \log m$$

zur Berechnung herangezogen. Diese Reskalierung lässt sich also auch dann noch durchführen, wenn die Berechnungen der Korrelationsintegrale bereits abgeschlossen sind. Dies folgt leicht aus folgenden Zusammenhängen:

Erwünscht ist eine Reskalierung der l um

$$\frac{1}{\sqrt{m}},$$

woraus in der logarithmischen Darstellung noch der Logarithmus ermittelt werden muss. Nun ist aber

$$\log\left(\frac{l}{\sqrt{m}}\right) = \log l - \frac{1}{2} \log m,$$

woraus sich die angegebene Verschiebung erklärt (Frank et al. 1993). Vor dem Minuszeichen steht zunächst die normalerweise gewählte Achsenskalierung, nämlich $\log l$, die um

$$\frac{1}{2} \log m$$

nach links (Minuszeichen) verschoben wird. Auch die K_2 -Entropie kann wie das PD_2 für einzelne Referenzpunkte ermittelt werden und stellt so ein lokales Entropie-Maß dar.

Der Lyapunov-Exponent erfasst direkt den Schmetterlingseffekt

Mit der K2-Entropie verwandt sind die so genannten *Lyapunov-Exponenten*. Obwohl benachbarte Trajektorien in chaotischen Attraktoren auf Grund des Schmetterlingseffektes immer auseinanderlaufen, weitet sich der Attraktor nicht unendlich im Phasenraum aus. Vielmehr sind chaotische Attraktoren gekennzeichnet durch relativ klare und räumlich begrenzte Form. Sie sind weit davon entfernt, nach und nach den ganzen Phasenraum auszufüllen, wie es im Gegensatz dazu für Zufallsrauschen der Fall ist. Dieses widersprüchliche Verhalten einer beständigen Divergenz bei fehlender räumlicher Ausweitung kann verstanden werden, wenn der Verlauf von Trajektorien in einem chaotischen Attraktor genauer betrachtet wird: Zunächst entfernen sich ursprünglich nahe beieinander liegende Trajektorien zunehmend voneinander, nach einer Zeit kommt es dann zu einer Faltung des so verbreiterten Trajektorienstromes, sodass weit entfernte Trajektorien zusammengelegt werden (siehe Abbildung 107). Durch die Faltung wird der Trajektorienstrom in seiner Breite beschränkt. Nach der Faltung läuft der Attraktor in sich selbst zurück. In chaotischen Attraktoren findet also eine beständige Ausweitung, eine Faltung und eine darauf wieder folgende Ausweitung statt. Dies Verhalten wird wegen der Ähnlichkeit zu den Knetvorgängen beim Teigkneten *Bäckertransformation* genannt.

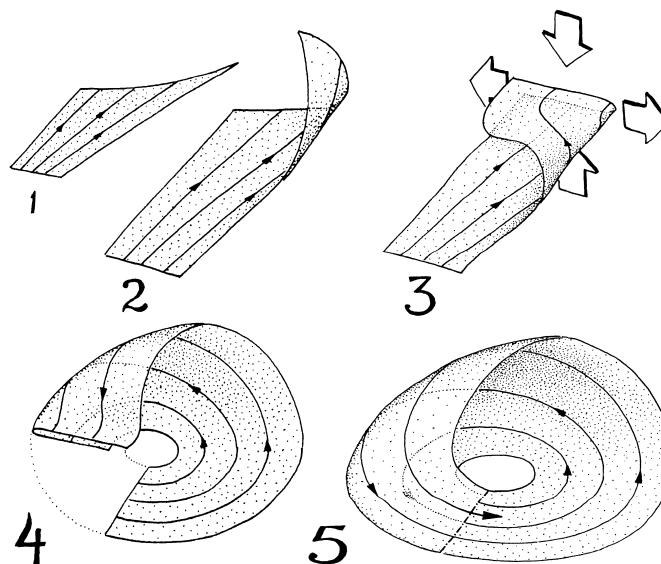


Abbildung 107: Bäckertransformation

Darstellung der so genannten Bäckertransformation, die in einem Knetvorgang divergierende Trajektorien zurückfaltet. (vgl. Schiepek und Strunk, 1994; zum Formalismus der Bäckertransformation vgl. Nicolis & Prigogine 1987, S. 271ff.; Schuster 1989a, S. 107f. vgl. auch S. 152ff.).

Das Spektrum der Lyapunov-Exponenten weist jeder Raumdimension einen eigenen Lyapunov-Exponenten zu

Damit lassen sich in chaotischen Prozessen divergente Trajektorienströme, die nah benachbarte Trajektorien auseinanderreißen und konvergierende Ströme, die weit entfernte Trajektorien zueinander falten identifizieren. Während die K-Entropie ein globales Maß für die Divergenz eines Attraktors angibt, differenzieren Lyapunov-Exponenten zwischen Divergenz und Konvergenz, indem sie das Verhalten von Trajektorien in jeder Phasenraumdimensionsrichtung einzeln quantifizieren. Aus diesem so genannte *Spektrum der Lyapunov-Exponenten* ergibt sich die bekannte Klassifikation von Attraktoren. Ein Fixpunkt-Attraktor beispielsweise setzt eine ausschließlich konvergente Trajektorienentwicklung voraus, da auf ihn alle Trajektorien, von beliebigen Ausgangspunkten im Attraktorbasin kommend,

zulaufen. Alle Lyapunov-Exponenten sind hier negativ. Im dreidimensionalen Phasenraum sind chaotische Attraktoren durch eine Kombination aus einem positiven und einem negativen Lyapunov-Exponenten sowie einem Exponenten gleich Null charakterisiert. In Phasenräumen mit vier und mehr Dimensionen können auch mehrere positive Lyapunov-Exponenten vorkommen.

Die Summe der Lyapunov-Exponenten ist in dissipativen Systemen kleiner Null

Für die Dynamik dissipativer Systeme, wie es lebende, selbstorganisierende Systeme sind, ist die Summe der Lyapunov-Exponenten kleiner Null, d.h. die Kontraktionseigenschaften überwiegen (vgl. Schiepek & Strunk 1994, S. 78f.), bis das System allmählich auf einen Fixpunkt zuläuft und damit stirbt. Dieser Vorgang kann jedoch relativ lange durch geeignete Energiezufuhr aufgehalten werden, so dass das System unter Umständen lange Zeit (so lange, wie es mit Energie versorgt wird und seine Systemstruktur nicht zerfällt) weit entfernt vom thermodynamischen Gleichgewicht „überleben“ kann (vgl. hierzu auch S. 86f. und die Ausführungen zur Theorie Dissipativer Systeme auf S. 125ff.).

Eine Möglichkeit das bei positiven Lyapunov-Exponenten zu beobachtende Auseinanderdriften von Trajektorien zu betrachten, bilden die schon von Henri Poincaré vorgeschlagenen und nach ihm benannten *Poincaré-Schnitte* (vgl. auch S. 89ff.).

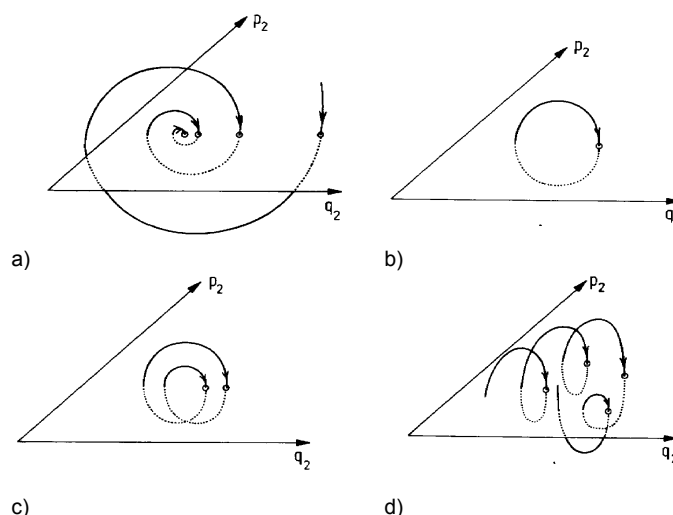


Abbildung 108: Poincaré-Schnitte für qualitativ unterschiedliche Trajektorienverläufe

Qualitativ unterschiedliche Trajektorienverläufe können über ihren Poincaré-Schnitt („return map“) identifiziert werden: a) zyklische Annäherung an einen Fixpunkt, b) Grenzzyklus, c) doppelperiodischer Zyklus, d) chaotische Bewegung (aus: Schuster 1989a, S. 14).

Wird durch einen Attraktor eine parallele Ebene gelegt, so wird diese von den Trajektorien durchstoßen. Werden nun diese Punkte auf der Ebene markiert (wobei nur ein Durchstoßen in einer Richtung beachtet wird), so zeigt sich, dass nah beieinander liegende Trajektorien in chaotischen Systemen nach jedem Umlauf um den Attraktor weiter voneinander entfernt auf die Ebene treffen. Der Abstand der Punkte wächst dabei exponentiell. Die Divergenz dicht beieinander liegender Trajektorienpunkte lässt sich danach durch folgende Exponentialgleichung beschreiben:

$$\varepsilon(t) = e^{\lambda t} \varepsilon(t_0),$$

wobei $\varepsilon(t_0)$ die Differenz der Startpunkte und $\varepsilon(t)$ den Abstand der Punkte zu einem späteren Zeitpunkt t bezeichnet. Der chaotische Fall ist durch ein positives λ gegeben. Es folgt durch einfaches Umformen:

$$\lambda = \frac{1}{t} \ln \frac{\varepsilon(t)}{\varepsilon(t_0)}.$$

Aus der Kenntnis der Punktabstände kann λ berechnet werden. Allerdings gilt ja, dass nur nahe beieinander liegende Trajektorien auseinander driften, während weit entfernte zusammenlaufen. Es ist also ein Kontinuum zu vermuten, von sehr nahen Trajektorien, die divergieren, zu sehr weit entfernten Trajektorien, die konvergieren. Um eine genaue Bestimmung eines Auseinanderlaufens vornehmen zu können, muss eine Grenzwertbetrachtung vorgenommen werden mit $t \rightarrow \infty$ und $\varepsilon \rightarrow 0$:

Gleichung 66:
Lyapunov-Exponent

$$\lambda = \lim_{t \rightarrow \infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{t} \ln \frac{\varepsilon(t)}{\varepsilon(t_0)}.$$

Zu beachten gilt dabei jedoch, dass im Falle eines positiven Lyapunov-Exponenten eine zunehmende Divergenz der Trajektorien dazu führen kann, dass $\varepsilon(t)$ bereits Werte annimmt, die dann im weiteren Verlauf dazu führen, dass ε sich wieder verringert. Die Divergenz naher Punkte im Phasenraum ist also nur für einen begrenzten Zeitraum beobachtbar. Schematisch wird dies in der folgenden Abbildung 109 dargestellt.

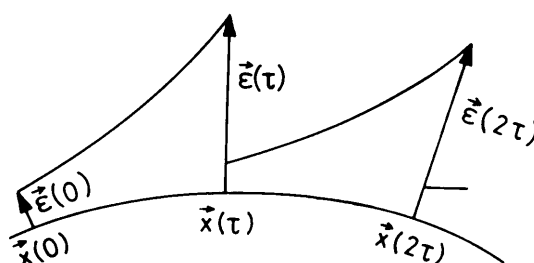


Abbildung 109: Schematische Darstellung der Bedeutung von Lyapunov-Exponenten

Die exponentielle Divergenz von Trajektorienverläufen zeigt sich, wenn wiederholt ein ungestörter mit einem minimal (um $\varepsilon(0)$) ausgelenkten Trajektorienverlauf verglichen wird.

Für mathematisch bekannte Systeme kann der Lyapunov-Exponent recht einfach berechnet werden. In einem solchen Fall ist es nämlich möglich, das System mit zwei um ε verschiedenen Startwerten jeweils zu simulieren und damit zwei genügend lange Zeitreihen zu berechnen, die beide in den Phasenraum eingebettet werden. Nun kann durch einfaches Bilden der Quadratwurzel der quadrierten Koordinatendifferenzen für jede Raumrichtung der Abstand der Trajektorienpunkte ermittelt werden, sodass für jede Raumrichtung ein λ berechnet werden kann. Die Abbildung 110 zeigt die Entwicklung der Lyapunov-Exponenten für die Verhulst-Gleichung, die nach dieser Methode für verschiedene Parametereinstellungen der Verhulst-Gleichung ermittelt wurden. Es zeigte sich bei diesem computergestützten Vorgehen eine starke Abhängigkeit vom Ausgangsunterschied ε .

Nur für sehr kleine Werte ergeben sich Lyapunov-Exponenten, wie sie in der Literatur angegeben werden. Für größere Ausgangsunterschiede fallen die Lyapunov-Exponenten kleiner aus und zeigen über den Parameterbereich hinweg geringere Varianz.

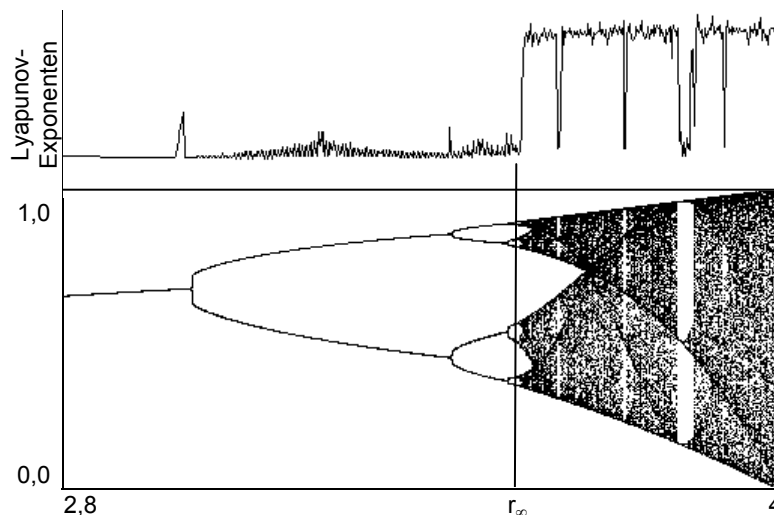


Abbildung 110: Lyapunov-Exponenten der Verhustzeitreihe

Deutlich zeigt sich ein Absinken des Lyapunov-Exponenten in den Fenstern der Ordnung (vgl. auch Abbildung 37, S. 109, Abbildung 38, S. 111, Abbildung 39, S. 112, Abbildung 40, S. 114).

Algorithmen, das Spektrum der Lyapunov-Exponenten aus empirischen Zeitreihen – also ohne Kenntnis des die Zeitreihe(n) generierenden Gleichungssystems – zu berechnen, liegen erst seit Mitte der 80er Jahre vor (Eckmann & Ruelle 1985, Wolf et al. 1985; für eine Diskussion spezifischer Vor- und Nachteile siehe Vastano & Kostelich 1986, Elbert et al. 1994; für ein Berechnungsbeispiel bei eindimensionalen Iterationsfolgen vgl. Seifritz 1987, S. 58ff.).

Die Anforderungen an die Zeitreihenlänge sind sehr groß

Die Anforderungen an die Zeitreihenlänge sind jedoch insbesondere für den am häufigsten genutzten und von Wolf et al. (1985) vorgeschlagenen Algorithmus sehr hoch: Bereits bei niedrigdimensionalen Systemen sind nach Elbert et al. (1994) einige tausend Zeitpunkte notwendig. Mit zunehmender Dimension m des Attraktors steigt die Länge entsprechend 10^m an (vgl. Schiepek & Strunk 1994, S. 79).

In neuerer Zeit wurden eine Reihe von Alternativen für den „Wolf-Algorithmus“ (Wolf et al. 1985) entwickelt (z.B. Rosenstein, Collins & De Luca 1993, Kantz 1994, Banbrook, Ushaw & McLaughlin 1996). Insbesondere auf die von Wolf et al. (1985) vorgeschlagene Methode zur Bestimmung von Lyapunov-Exponenten und auf den Algorithmus von Rosenstein et al. (1993) soll hier etwas näher eingegangen werden. Beide Verfahren ermitteln den so genannten größten Lyapunov-Exponenten (LLE – Largest Lyapunov-Exponent), der für den Nachweis einer chaotischen Systemdynamik ausreicht. Ist der größte Lyapunov-Exponent positiv, liegt zwingend eine chaotische Dynamik vor, auch wenn das gesamte Spektrum der Lyapunov-Exponenten für die verschiedenen Raumdimensionen nicht bekannt ist.

8.2.5.1 Die Bestimmung von Lyapunov-Exponenten nach Wolf et al.

Der „Wolf-Algorithmus“ ist einer der ersten und inzwischen sicherlich der bekannteste Algorithmus zur Berechnung des LLE aus einer Zeitreihe, für die das generierende System nicht bekannt ist. Zur Bestimmung des LLE wird zunächst ein Referenzpunkt auf der Zeitreihe gewählt. Die zeitliche Entwicklung dieses und eines maximal um ε_{\min} entfernten Punktes wird danach für eine festgelegte Anzahl von Zeitschritten (*Steps*) verfolgt. Innerhalb der durch *Steps* festgelegten Zeitschritte werden sich die beiden Trajektorien im Fall von Chaos exponentiell voneinander entfernen. Diese exponentielle Divergenz wird als Schätzung für den Lyapunov-Exponenten registriert. Natürlich ist eine solche Schätzung für nur einen Referenzpunkt unreliaabel, sodass nach den durch *Steps* vorgesehenen Zeitschritten ein neuer Nachbar gewählt wird, der maximal um ε_{\min} von der Referenztrajektorie abweicht. Dieses Austauschen der einen Nachbartrajektorie durch eine neue wird nötig, da die beiden Trajektorien nur begrenzt divergieren. Wie bereits erwähnt, nähern sie sich nach Erreichen einer maximalen Divergenz einander wieder an (vgl. die Abbildung 107, S. 381 zur Bäckertransformation und die Ausführungen auf S. 152). In diesem Sinne ist es durchaus möglich, dass bereits bevor alle durch *Steps* festgelegten Zeitschritte durchlaufen wurden, eine mit ε_{\max} angegebene relativ große Divergenz erreicht wird. Tritt dies ein, wird für die Referenztrajektorie bereits an dieser Stelle ein neuer Nachbar gesucht. Insgesamt ist der Algorithmus damit auf die Bestimmung von fünf Parametern angewiesen:

1. Zur Rekonstruktion des Attraktors wird hier, wie auch bei anderen Verfahren, die der Bestimmung von Lyapunov-Exponenten dienen, ein geeignetes τ für die Ermittlung der Zeitverzögerungskordinaten benötigt. Hier kann z.B. die Mutual-Information (siehe S. 360f.) zur Berechnung einer geeigneten Zeitverzögerung herangezogen werden.
2. Für eine reliable Ermittlung des Lyapunov-Exponenten sollte der Attraktor in einem genügend großen Phasenraum eingebettet werden. In diesem Sinne sollte die Berechnung für einem Einbettungsraum erfolgen, der der tatsächlichen Dimensionalität des Attraktors entspricht. Daher ist es erforderlich, dass vor der Berechnung von Lyapunov-Exponenten die Dimensionalität des Attraktors über das D2 bereits bestimmt wurde (siehe S. 366f.).
3. Jedes Mal, wenn der Algorithmus einen Nachbarn zu einem Referenzpunkt sucht, sollte dieser Vergleichspunkt nicht weiter als ε_{\min} vom Referenzpunkt entfernt sein. Wolf et al. (1985) schlagen hier einen Wert vor, der zwischen 0% und 2% des Range der Messwerte der Zeitreihe liegt. Diese grobe Schätzung für ε_{\min} führt zu relativ guten Ergebnissen, wenn der untersuchte Attraktor mit 3 bis 4 Dimensionen eingebettet wird. Für höhere Einbettungen sollte ε_{\min} um den Faktor $(m/3)^{0,5}$ erhöht werden.
4. Erreicht die Distanz zwischen den beiden Trajektorien einen mit ε_{\max} angegebenen Wert, sollte für die Referenztrajektorie eine neue Nachbartrajektorie ermittelt werden. Wolf et al. (1985) schlagen für ε_{\max} einen Wert vor, der zwischen 10% und 15% des Range der Messwerte der Zeitreihe liegt. Auch die hier vorgeschlagene grobe Schätzung für ε_{\max} führt zu relativ guten Ergebnissen, wenn der untersuchte Attraktor mit 3 bis 4 Dimensionen eingebettet wird. Für höhere Einbettungen sollte auch ε_{\max} um den Faktor $(m/3)^{0,5}$ erhöht werden.

5. Die Divergenz zwischen der Referenztrajektorie und einer Nachbartrajektorie wird für einen mit *Steps* bezeichneten Zeitraum verfolgt. Für *Steps* sollte ein Wert gewählt werden, der zwischen dem vierten und dritten Teil der dominanten Periodenlänge des Systems liegt. Diese kann über eine Spektralanalyse bestimmt werden (vgl. 348ff.).

In der Praxis der Anwendung des Algorithmus zeigen sich starke Abhängigkeiten der Ergebnisse von den genannten Parametern. Insbesondere die Wahl von *Steps* hat einen großen Einfluss auf die Berechnungsergebnisse. Als einzige Möglichkeit, die Reliabilität der Berechnungen einzuschätzen schlagen Wolf et al. (1985) die Variation der Parameter und damit verbunden die Überprüfung der Stabilität der Ergebnisse vor.

Rosenstein et. al. (1993) verweisen auf weitere Probleme des von Wolf et al. vorgeschlagenen Algorithmus und anderer ähnlicher Algorithmen zur Bestimmung von Lyapunov-Exponenten (z.B. für die Bestimmung des LLE: Wright 1984, Farmer & Sidorowich 1987, Sato, Sano & Sawada 1987, Casdagli 1989, Abarbanel, Brown & Kadtke 1990, Ellner et al. 1991, Wales 1991; für die Bestimmung des vollständigen Lyapunov-Spektrums: Eckmann & Ruelle 1985, Sano & Sawada 1985, Eckmann et al. 1986, Briggs 1990, Brown, Bryant & Abarbanel 1991, Stoop & Parisi 1991, Zeng, Eykholt & Pielke 1991; die genannten Arbeiten gehen im Wesentlichen auf folgende frühere Arbeiten zurück: Eckmann & Ruelle 1985, Sano & Sawada 1985, Wolf et al. 1985, Farmer & Sidorowich 1987). Die genannten Algorithmen sind allesamt unreliabel für kurze Zeitreihen, extrem rechenintensiv und relativ schwer zu implementieren. Am Beispiel des Wolf-Algorithmus lässt sich diese Kritik relativ gut belegen. Der Algorithmus folgt einer Referenztrajektorie, für die die Distanz zu einer Nachbartrajektorie bis zu dem durch *Steps* oder durch ε_{\max} definierten Abbruch registriert wird. Dabei werden dann jedoch nicht alle Daten zur Berechnung genutzt, da zum einen nur für einige Punkte auf dem Attraktor Nachbarn gesucht werden und zum andern immer nur eine Nachbartrajektorie gewählt wird. Dies und das Fehlen einer Statistik für die Güte der Berechnung führt zu der geringen Reliabilität des Algorithmus bei kurzen Zeitreihen.

Zudem wird bei der Wahl der Nachbartrajektorie unter Rückgriff auf einen Gram-Schmidt-Algorithmus darauf geachtet, dass diese sich in die gleiche Raumrichtung bewegt wie die Referenztrajektorie. Diese Prüfung kostet Rechnerzeit und ist relativ aufwändig zu implementieren. Dabei ist dieses Kriterium für die Bestimmung des größten Lyapunov-Exponenten gar nicht zwingend erforderlich (Rosenstein, Collins & De Luca 1993).

8.2.5.2 Die Bestimmung von Lyapunov-Exponenten nach Rosenstein et al.

Rosenstein, Collins und de Luca (1993) schlagen einen weit einfacheren Algorithmus vor als die Arbeitsgruppe von Wolf, der zudem auch für kurze Zeitreihen und verrauschte Daten zu reliablen Ergebnissen führt. Prinzipiell baut das von ihnen vorgeschlagene Verfahren auf einer Arbeit von Sato, Sano und Sawada (1987) auf, die jedoch grundlegend erweitert wird.

Die Grundzüge der Berechnungsmethodik sind tatsächlich relativ einfach. Für jeden Punkt der Zeitreihe wird der jeweils nächstgelegene Nachbar gesucht. Die zeitliche Entwicklung für den Referenzpunkt und dem nächsten Nachbar führt im Fall von Chaos zu einer wachsenden Divergenz der Punkte. Die beiden Punkte werden dabei über einen nicht zu klein zu wählenden Zeitraum auf ihrem Weg durch den Attraktor verfolgt.

Damit ergibt sich für jeden Referenzpunkt X_i zunächst eine Distanz $d_i(0)$ zum nächstgelegenen Nachbarn X_j und in zeitlicher Folge die Differenz nach einem Zeitschritt $d_i(1)$, einem zweiten Zeitschritt $d_i(2)$ und so weiter. Da jeder Punkt des Attraktors einmal als Referenzpunkt genutzt wird, ergibt sich für jeden Referenzpunkt X_i mit $i = 1$ bis n eine Reihe von Differenzen $d_i(j)$ mit $j = 1$ bis N , wobei N den Abbruch der Beobachtung der beiden Trajektorien angibt. N sollte groß genug gewählt werden um sicher zu stellen, dass die Trajektorien nach dieser Anzahl an Zeitschritten auch bereits maximale Divergenz erreicht haben. Wurden die Distanzen für alle j und alle Referenzpunkte ermittelt, wird für jedes j der Mittelwert der Distanzen berechnet. In diesem Sinne ergibt sich für $j = 0$ der mittlere Abstand zwischen den Referenzpunkten und den Nachbarpunkten als mittlerer Ausgangsabstand. Für $j = 1$ entspricht der gebildete Mittelwert dem mittleren Abstand über alle Referenzpunkte (und Nachbarn) nach einem Zeitschritt und so weiter.

Im Fall von Chaos sollte $\bar{d}(j)$ mit wachsendem j exponentiell zunehmen. Wird der Logarithmus von $\bar{d}(j)$ über j aufgetragen, so ergibt sich der Lyapunov-Exponent aus der Steigung der ermittelten Gerade. Ähnlich wie für die Bestimmung des D2 zeigt sich diese Steigung, sofern sie überhaupt vorliegt, jedoch nur in einem begrenzten Skalierungsbereich. Insbesondere bei großem j kann die Differenz der beobachteten Punkte nicht mehr zunehmen, wenn inzwischen die maximale Divergenz erreicht wurde (vgl. Abbildung 111). Daher geht für große j die Steigung auf Null. Nur, wenn ein Skalierungsbereich mit linearer Steigung gefunden werden kann liegt auch eine *exponentielle* Divergenz vor, wie sie für eine chaotische Dynamik kennzeichnend ist.

Damit besitzt der vorgeschlagene Algorithmus den Vorteil, die ermittelten Ergebnisse auf ihre Gültigkeit prüfen zu können. Des weiteren nutzt das Verfahren jeden Punkt des Attraktors, sodass insgesamt kürzere Zeitreihen ausreichen um zu reliablen Ergebnissen zu gelangen. Zudem müssen für die Berechnung nicht fünf, wie beim Wolf-Algorithmus, sondern nur mehr vier Parameter geschätzt werden. Die zwei Parameter, die den eigentlichen Algorithmus beeinflussen, können sogar grob geschätzt werden. Es genügt, dass sie nicht zu klein gewählt werden:

1. Zur Rekonstruktion des Attraktors wird hier, wie auch bei anderen Verfahren, die der Bestimmung von Lyapunov-Exponenten dienen, ein geeignetes τ für die Ermittlung der Zeitverzögerungskordinaten benötigt. Hier kann z.B. die Mutual-Information (siehe S. 360f.) zur Berechnung einer geeigneten Zeitverzögerung herangezogen werden.
2. Für eine reliable Ermittlung des Lyapunov-Exponenten sollte der Attraktor in einem genügend großen Phasenraum eingebettet werden. In diesem Sinne sollte die Berechnung für einen Einbettungsraum erfolgen, der der tatsächlichen Dimensionalität des Attraktors entspricht. Daher ist es erforderlich, dass vor der Berechnung von Lyapunov-Exponenten die Dimensionalität des Attraktors über das D2 bereits bestimmt wurde (siehe S. 366f.).

3. Um zu verhindern, dass als nächster Nachbar eines Referenzpunktes sein direkter zeitlicher Vorgänger oder Nachfolger gewählt wird, sollten zwischen dem Referenzpunkt und seinem nächsten Nachbarn mindestens so viele Zeitschritte liegen, wie sie durch die mittlere Periode der Zeitreihe als Minimum gegeben sind. Zur Bestimmung dieses Parameters, der als *Theiler-Window* bezeichnet wird, reicht eine grobe Schätzung, wenn sie nicht zu klein ausfällt.
4. Damit tatsächlich ein Skalierungsbereich gefunden werden kann, sollten die beiden Trajektorien mindestens so lange miteinander verglichen werden, bis der Zeitpunkt maximaler Divergenz erreicht wurde. Hier empfiehlt es sich N nicht zu klein zu wählen.

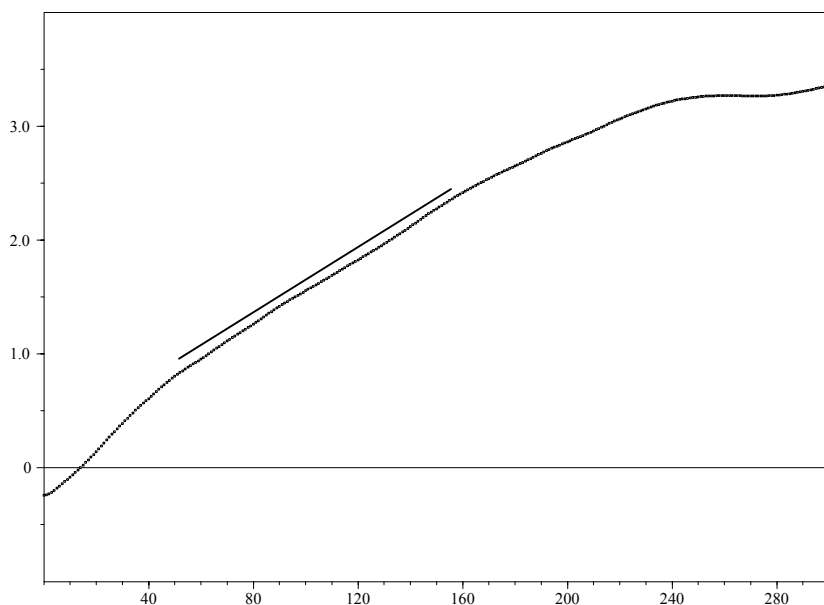


Abbildung 111: Die Bestimmung des größten Lyapunov-Exponenten mittels des Algorithmus von Rosenstein et al. (1993)

Die Abbildung zeigt die logarithmierte zunehmende mittlere Divergenz nahe benachbarter Trajektorien für dreihundert Zeitschritte. Nach ca. 240 Zeitschritten wird die maximale Divergenz erreicht, sodass sich die Kurve verflacht. Die Region mit der besten linearen Steigung, der Skalierungsbereich, wird in der Abbildung durch eine parallelverschobene Gerade gekennzeichnet. Der Lyapunov-Exponent ergibt sich aus der Steigung dieser Geraden. Umgerechnet auf die Zeit, die zwischen zwei Zeittakten vergeht (0,01 Sekunden) ergibt sich ein Lyapunov-Exponent von 1,45 Bit/Sekunde. Der Literaturwert beläuft sich für das hier vorliegende Lorenz-System auf 1,5 Bit/Sekunde (vgl. Wolf et al. 1985).

Die in der Abbildung dargestellte Berechnung ergibt sich für den Lorenz-Attraktor mit $r = 45,92$; $\sigma = 16$ und $b = 4$. Erzeugt wurden 5.000 Messzeitpunkte. Die Berechnung des Lyapunov-Exponenten erfolgte für eine fünfdimensionale Einbettung. Das Time-Lag wurde mit Hilfe der Mutual-Information ermittelt.

Für eine Reihe von mathematisch bekannten Systemen konnten Rosenstein et al. die Robustheit des Algorithmus überzeugend darlegen. Sowohl hinsichtlich der Zeitreihenlänge, geringerer Einbettungsdimension als eigentlich erforderlich, verschiedener τ zur Rekonstruktion des Phasenraumes als auch in Hinblick auf Rauschen ergaben sich die erwarteten Lyapunov-Exponenten im Rahmen einer akzeptablen Fehlertoleranz, die weit unter der vergleichbarer anderer Algorithmen liegt.

Weiterentwickelt wurde das Verfahren durch Kantz (1994), der die Berechnung getrennt für verschieden große Ausgangsdistanzen wiederholt. Ähnlich wie beim Wolf-Algorithmus wird dabei ein ε_{\min} festgelegt, welches angibt, wie stark sich der Referenzpunkt und der Nachbarpunkt zu Beginn einer jeden Berechnung maximal unterscheiden dürfen. Durch die Festlegung einer solchen Grenze wird verhindert, dass für einzelne Referenzpunkte nächste Nachbarn gefunden werden, die bereits zu Beginn sehr stark voneinander entfernt sind. Da ein ideales ε_{\min} jedoch nicht vorab bestimmt werden kann, wird die Berechnung für wachsende ε_{\min} wiederholt.

8.2.5.3 Lyapunov-Exponenten für nichtstationäre Zeitreihen

Ebenso wie bei der Darstellung der Verfahren zur Dimensionsanalyse bereits ausgeführt, handelt es sich auch bei Chaotizitätskennwerten um Invarianten des dynamischen Systems (vgl. S. 372ff.). In diesem Sinne wird bei der Berechnung des größten Lyapunov-Exponenten vorausgesetzt, dass die Zeitreihe hinsichtlich ihrer Chaotizität stationären Charakter besitzt. Dies kann jedoch in der Regel nur für experimentell gewonnene Datensätze, für die von einer Konstanz relevanter Kontrollparameter ausgegangen werden kann, und Datensätze, die aus Simulationen gewonnen werden, vorausgesetzt werden. Es stellt sich daher die Frage, ob auch die Bestimmung von Lyapunov-Exponenten um Verfahren erweitert werden kann, die Veränderungen in der Chaotizität abzubilden vermögen.

Die Bestimmung des Lyapunov-Exponenten in einem bestimmten Messzeitpunkt ist praktisch kaum durchführbar und theoretisch problematisch

Eine einfache Möglichkeit für die Bestimmung eines solchen *Pointwise-Lyapunov-Exponenten* wäre z.B. in Anlehnung an das PD2 Verfahren denkbar (vgl. S. 373ff.). In diesem Sinne könnte jeweils ein Referenzpunkt gewählt werden, für den die exponentielle Divergenz zu einem nächsten Nachbarn im Verlauf der Zeit bestimmt wird. Dabei würde die Berechnung des Lyapunov-Exponenten jedoch jeweils nur über den Vergleich zweier Trajektorien vorgenommen. Ein solches Verfahren führt daher zu extrem unreliaiblen Ergebnissen, die in der Praxis nicht zu interpretieren wären. Aber auch inhaltlich könnte ein solches Ergebnis nicht als zeitpunktbezogener Lyapunov-Exponent interpretiert werden. Da der Lyapunov-Exponent per Definition ein zeitlich begrenztes Auseinanderdriften nahe benachbarter Trajektorien beschreibt, handelt es sich immer um ein Maß, das Aussagen über einen Zeitraum und nicht über einen Zeitpunkt zulässt.

Die Berechnung von Lyapunov-Exponenten für ein Zeitfenster

Es liegt daher nahe den Lyapunov-Exponenten im Verlauf der Zeit für ein begrenztes Zeitfenster zu berechnen, welches nach und nach über die Zeitreihe verschoben wird. Ähnliche Verfahren wurden bereits im Zusammenhang mit dem gleitenden Mittelwert (vgl. S. 333f.) und der abschnittswisen Korrelation (vgl. S. 346f.) besprochen. Einem solchen Vorgehen steht jedoch der hohe Bedarf an Messzeitpunkten für die Berechnung entgegen. Insbesondere für das Verfahren von Wolf et al. (1985) und verwandter Verfahren (siehe oben) sind sehr lange Zeitreihen nötig, um zu reliablen Ergebnissen zu gelangen. Bedeutend bessere Ergebnisse für ein solches Vorgehen sind jedoch bei Anwendung des Algorithmus von Rosenstein zu erwarten. Je nach Komplexität des untersuchten Systems zeigt der von Rosenstein, Collins und de Luca (1993) vorgeschlagene Berechnungsmodus eine ausreichende Reliabilität auch für kurze Zeitreihen.

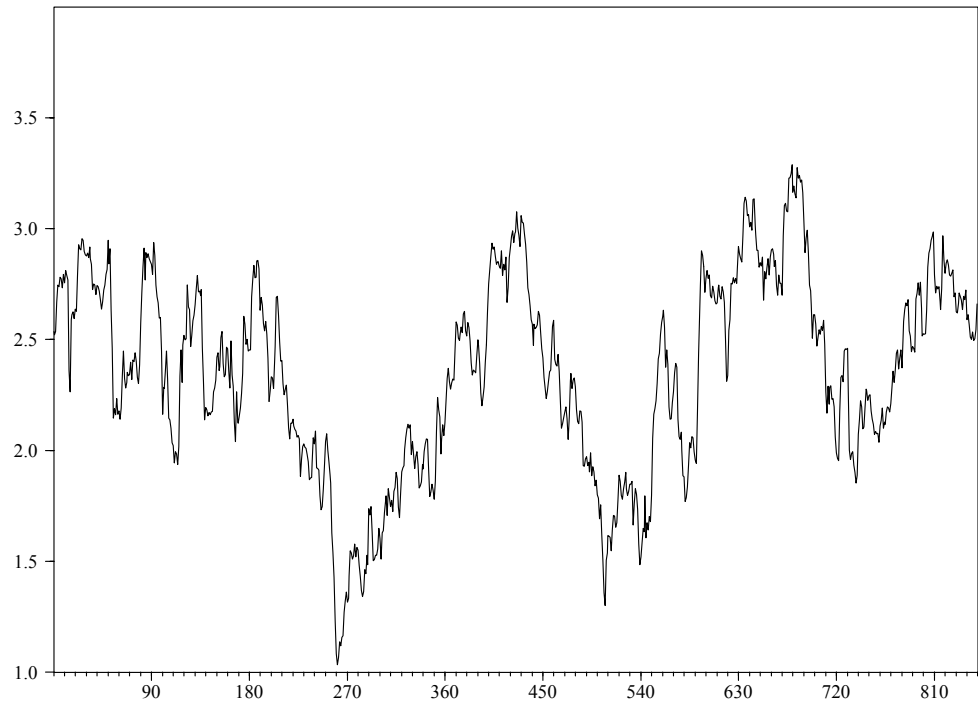


Abbildung 112: Abschnittweiser Lyapunov-Exponent berechnet für ein gleitendes Fenster von 1.500 Messzeitpunkten – Wolf-Algorithmus

Die Abbildung zeigt die jeweils für ein Fenster von 1.500 Messzeitpunkten berechneten Lyapunov-Exponenten für die Variable x der Lorenz-Zeitreihe. Das Fenster wird nach und nach um 10 Messzeitpunkte weiter über die insgesamt 10.000 Messzeitpunkte lange Zeitreihe verschoben. Aus der Literatur wäre ein Wert von 1,5 Bit/Sekunde zu erwarten gewesen (vgl. Wolf et al. 1985), der aber im Durchschnitt überschätzt wird. Die große Streuung der in der Abbildung wiedergegebenen Lyapunov-Exponenten belegt die geringe Eignung des von Wolf et al. vorgeschlagenen Algorithmus für die Berechnung von abschnittweisen Lyapunov-Exponenten (vgl. auch Abbildung 113).

Die in der Abbildung dargestellte Berechnung ergibt sich für den Lorenz-Attraktor mit $r = 45,92$; $\sigma = 16$ und $b = 4$. Erzeugt wurden 10.000 Messzeitpunkte.

Für die Verhulst-Gleichung reichen bereits 100 Messzeitpunkte aus, ohne dass der Fehler der Berechnung des Lyapunov-Exponenten über 5% wächst. Für das sich sehr einfach verhaltende Hénon-System bleibt der Fehler bei 100 Datenpunkten sogar unter 2%. Etwas schlechter fallen die Ergebnisse jedoch für komplexere Systeme, wie das Lorenz- und das Rössler-System aus. Zeigt der für das Lorenz-System ermittelte Lyapunov-Exponent bei 5.000 Messzeitpunkten einen Fehler von nur 1,5%, so steigt dieser bei nur 2.000 Messzeitpunkten bereits auf über 10% und für 1.000 Messzeitpunkte auf rund 17%. Beim Rössler-System fallen die Ergebnisse weniger einheitlich aus. Liegt der ermittelte Lyapunov-Exponent bei 2.000 Messzeitpunkten nur rund 2% über dem Literaturwert, so steigt der Fehler bereits bei 1.600 Messzeitpunkten auf über 9% und fällt bei 1.200 Messzeitpunkten wieder auf 2%. Weitere Verkürzungen der Rössler-Zeitreihe führen jedoch zu sehr hohen Berechnungsfehlern (27% Fehler bei 800 Messzeitpunkten und 61% Fehler bei 400 Messzeitpunkten; vgl. Rosenstein, Collins & De Luca 1993). Obwohl die Ergebnisse für die verschiedenen Systeme recht unterschiedlich ausfallen und die ermittelten Fehler zum Teil doch recht hohe Werte annehmen, sind die Abweichungen doch erheblich geringer, als für den von Wolf et al. (1985) vorgeschlagenen Algorithmus.

Wie stark sich eine Verkürzung der Zeitreihenlänge auf die Genauigkeit des Wolf-Algorithmus auswirkt ist in Abbildung 112 zu sehen. Der Lyapunov-Exponent wurde für diese Abbildung jeweils für ein Fenster von 1.500 Messzeitpunkten der Variable x des Lorenzsystems berechnet. Insgesamt ist die Zeitreihe 10.000 Messzeitpunkte lang. Nach jeder Berechnung des Lyapunov-Exponenten, wird das Fenster um 10 Messzeitpunkte weitergeschoben. Die Ergebnisse schwanken zwischen 1,0 Bit/s (Fehler von 33,3%) und 3,3 Bit/s (Fehler von 120,0%). Die durchschnittliche Abweichung liegt bei 29%.

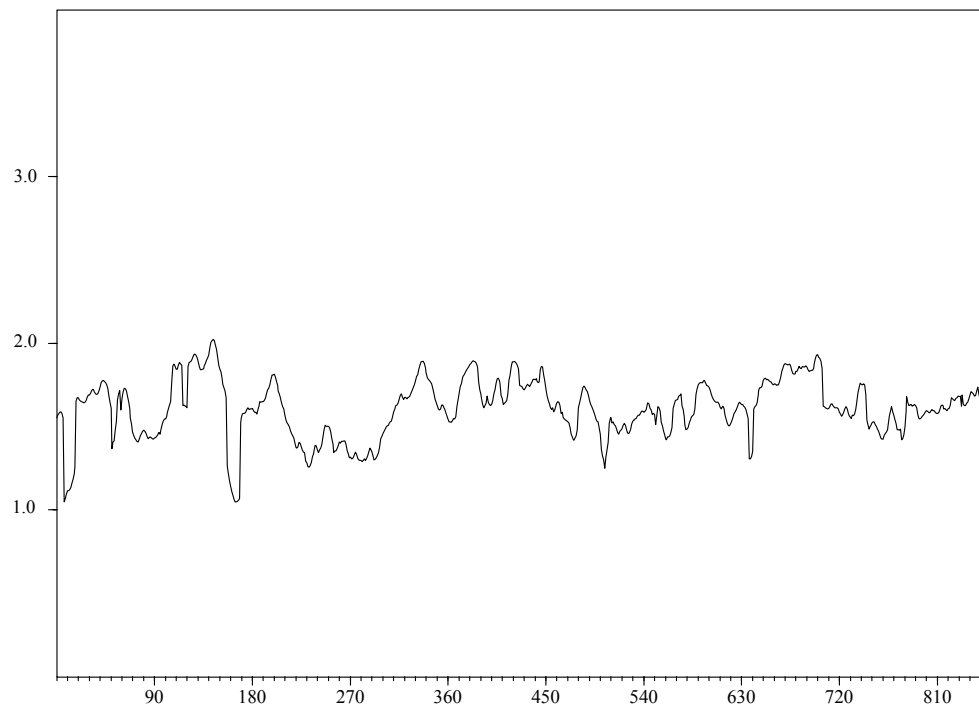


Abbildung 113: Abschnittweiser Lyapunov-Exponent berechnet für ein gleitendes Fenster von 1.500 Messzeitpunkten – Rosenstein-Algorithmus

Die Abbildung zeigt die jeweils für ein Fenster von 1.500 Messzeitpunkten berechneten Lyapunov-Exponenten für die Variable x der Lorenz-Zeitreihe. Das Fenster wird nach und nach um 10 Messzeitpunkte weiter über die insgesamt 10.000 Messzeitpunkte lange Zeitreihe verschoben. Der Literaturwert von 1,5 Bit/Sekunde (vgl. Wolf et al. 1985) wird im Durchschnitt geringfügig überschätzt (ermittelt wird ein durchschnittlicher Lyapunov-Exponent von 1,6 Bit/Sekunde). Die relativ geringe Streuung der in der Abbildung wiedergegebenen Lyapunov-Exponenten belegt die Eignung des von Rosenstein, Collins und de Luca (1993) vorgeschlagenen Algorithmus für die Berechnung von abschnittweisen Lyapunov-Exponenten (vgl. auch Abbildung 112).

Die in der Abbildung dargestellte Berechnung ergibt sich für den Lorenz-Attraktor mit $r = 45,92$; $\sigma = 16$ und $b = 4$. Erzeugt wurden 10.000 Messzeitpunkte.

Bedeutend vielversprechender fallen die Ergebnisse jedoch bei Anwendung des von Rosenstein et al. vorgeschlagenen Verfahrens aus. Der Lyapunov-Exponent wurde, wie auch zuvor für den Wolf-Algorithmus, jeweils für ein Fenster von 1.500 Messzeitpunkten der Variable x des Lorenzsystems berechnet. Insgesamt ist die Zeitreihe 10.000 Messzeitpunkte lang. Nach jeder Berechnung des Lyapunov-Exponenten, wird das Fenster um 10 Messzeitpunkte weitergeschoben. Die Ergebnisse, die in Abbildung 113 dargestellt sind, schwanken zwischen 1,1 Bit/s (Fehler von 26,0%) und 2,0 Bit/s (Fehler von 33,3%). Die durchschnittliche Abweichung liegt mit 11,6% weit unter der durchschnittlichen Abweichung, die für den Wolf-Algorithmus ermittelt wurde.

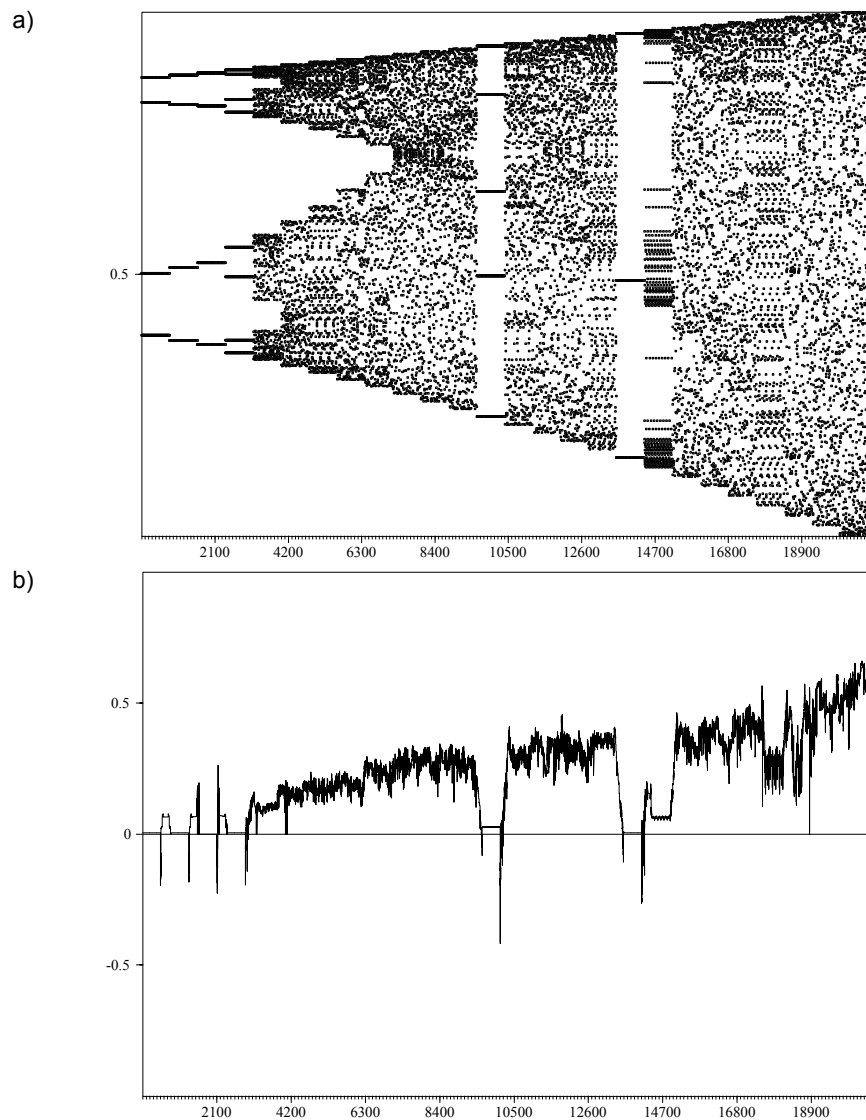


Abbildung 114: Abschnittweiser Lyapunov-Exponent für eine Beispielzeitreihe

Die in a) dargestellte Zeitreihe bildet sich aus jeweils 800 Messzeitpunkten der Verhulst-Dynamik für Parameterwerte zwischen 3,5 und 4,0. Nach jeweils 800 Messzeitpunkten wurde der Parameter um einen Wert von 0,02 erhöht, sodass sich insgesamt 75 verschiedene Parameterwerte ergeben (zur Verhulst-Dynamik siehe ausführlicher ab S. 107ff.). In b) finden sich die Ergebnisse der abschnittweisen Lyapunov-Exponenten der Zeitreihe für ein Fenster von 300 Messzeitpunkten, welches nach jeder Berechnung um einen Messzeitpunkt verschoben wurde. Wie sich zeigt, reagiert das Maß höchst sensibel auf die Veränderungen in der Chaotizität der Zeitreihe. Auch die Fenster der Ordnung sind deutlich ausgeprägt zu erkennen.

Zumindest bei Anwendung des von Rosenstein, Collins und de Luca (1993) vorgeschlagenen Algorithmus scheint es möglich zu sein relativ reliable Lyapunov-Exponenten auch für kleinere Abschnitte einer längeren Zeitreihe ermitteln zu können. Wie empfindlich dieses nichtstationäre Maß auf Veränderungen in der Chaotizität einer Zeitreihe reagiert, zeigt sich in der vorstehenden Abbildung 114.

Für eine brauchbare Anwendung dieses Verfahrens hat sich die Breite des Fensters jedoch nach der Dynamik des Systems zu richten. Bei besonders komplexen Systemen, wie dem oben herangezogenen Lorenz-System, werden weit mehr Datenpunkte für eine reliable Schätzung benötigt als bei relativ einfachen Systemen,

wie z.B. der Hénon-Dynamik. Für empirische Zeitreihen mit unbekanntem generierendem System empfiehlt es sich die Berechnung für verschiedene Fensterbreiten zu wiederholen. Zeigen sich starke Fluktuationen, ist entweder das Fenster zu klein gewählt oder das System zeigt tatsächlich beständige Veränderungen in seiner Chaotizität.

8.2.5.4 Ein Verfahren zur Bestimmung des Skalierungsbereiches

Während sich der Wolf-Algorithmus leicht als Verfahren zur abschnittsweisen Bestimmung von Lyapunov-Exponenten implementieren lässt aber nur eine unzureichende Genauigkeit erlaubt, muss für jeden Lyapunov-Exponenten, der über den von Rosenstein et al. vorgeschlagenen Algorithmus berechnet wird ein Skalierungsbereich für die beste lineare Steigung der logarithmierten mittleren Distanzen bei zunehmenden Zeitschritten bestimmt werden (siehe oben S. 386ff.). Ähnliche Probleme ergeben sich auch für die nichtstationäre Bestimmung der Dimensionalität mittels des PD2-Verfahrens (siehe oben S. 373ff.).

Im Rahmen der vorliegenden Arbeit wurde für den Rosenstein-Algorithmus ein sehr robustes und gut zu implementierendes Verfahren zur Identifikation des Skalierungsbereiches entwickelt. Kern dieses Verfahrens sind die typischen geometrischen Eigenschaften der Kurven, die sich bei der Bestimmung des Lyapunov-Exponenten nach dem Verfahren von Rosenstein et al. für die Darstellung von $\log(\bar{d}_j)$ vs. j ergeben. Da nämlich ab einer bestimmten Größe von j $\log(\bar{d}_j)$ nicht mehr weiter ansteigt, kann der gesuchte Skalierungsbereich nur links von dieser Grenze gefunden werden.

Die folgende Abbildung 115 verdeutlicht, wie diese Grenze gefunden werden kann. Wird der Anfangspunkt (a) der Kurve mit dem Endpunkt (b) verbunden, so ergibt sich eine Gerade. Wird nun für jedes j der Abstand zwischen der konstruierten Gerade \overline{ab} und $\log(\bar{d}_j)$ berechnet, der sich über das Lot auf \overline{ab} durch $\log(\bar{d}_j)$ ergibt, so findet sich der gesuchte Punkt (c) im größten Abstand.

Darauf aufbauend lässt sich nun erneut eine Gerade durch (a) und den neuen Punkt (c) konstruieren. Sollten auch zu dieser Geraden nennenswerte Distanzen in Bezug auf $\log(\bar{d}_j)$ auftreten, so kann durch den Punkt mit der größten Distanz ein neuer Punkt (d) bestimmt werden. Insgesamt sind damit drei Geraden gegeben, nämlich \overline{ac} , \overline{ad} und \overline{dc} . Falls nötig lassen sich auch diese Abschnitte nach dem beschriebenen Verfahren weiter unterteilen. In der Regel genügen jedoch die bisher ermittelten Abschnitte, sodass im nächsten Schritt Ausgleichsgeraden durch $\log(\bar{d}_j)$ gelegt werden, deren Anfangs- und Endpunkte von den ermittelten Punkten (a), (d) und (c) begrenzt werden. Zur Beurteilung der Ausgleichsgeraden wird dann die Korrelation der jeweiligen Gerade mit $\log(\bar{d}_j)$ und die Länge des jeweiligen Abschnittes bestimmt.

Die Gerade, die die höchste Korrelation besitzt und damit den linearsten Teil von $\log(\bar{d}_j)$ beschreibt, ist in der Regel der gesuchte Skalierungsbereich. Selten jedoch kann es geschehen, dass eine der ermittelten Geraden zwar die höchste Korrelation mit $\log(\bar{d}_j)$ aufweist, aber viel kürzer ist als eine andere Gerade mit ähn-

lich hoher Korrelation. In diesem Fall wird die längere Gerade gewählt. Insgesamt sollte die Korrelation der besten Gerade jedoch nicht geringer als ein vorher festgelegter Grenzwert sein.

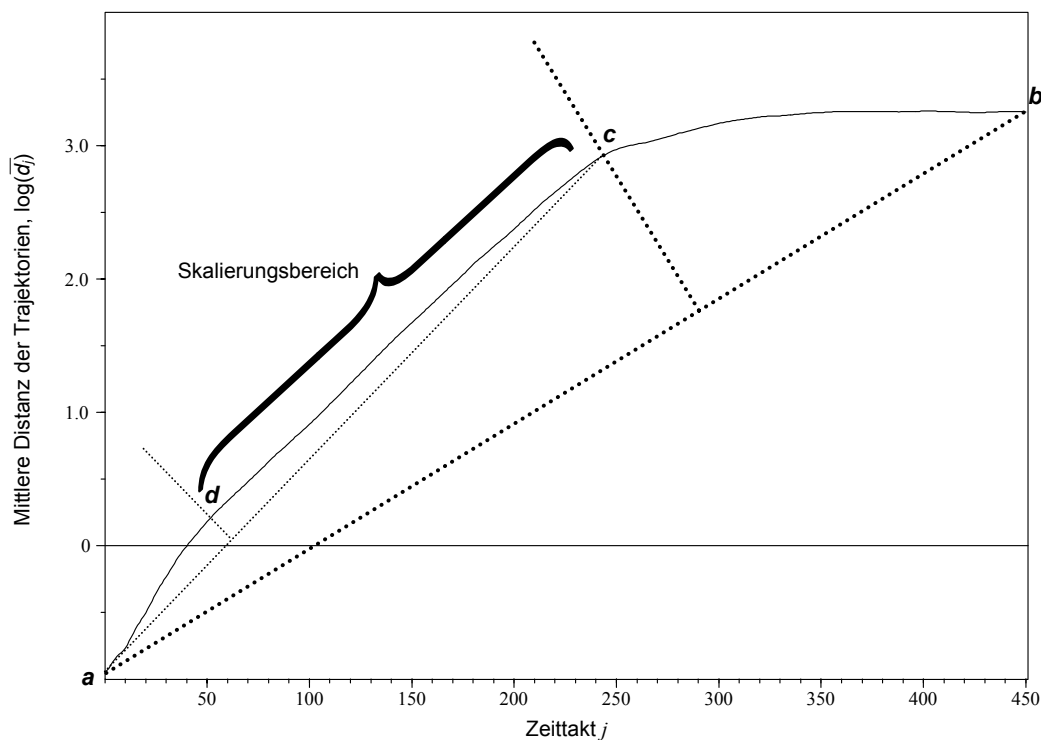


Abbildung 115: Verfahren zur Bestimmung des Skalierungsbereiches

Die Bestimmung des LLE erfordert im Rahmen des Verfahrens von Rosenstein, Collins und de Luca (1993) die Identifikation eines linearen Skalierungsbereiches im Plot von $\log(\bar{d}_j)$ vs. j . Die Abbildung zeigt, wie dieser lineare Bereich automatisiert bestimmt werden kann. Für nähere Erläuterungen vgl. ab S. 393).

Der vorgeschlagene Algorithmus für die automatische Bestimmung des Skalierungsbereiches in $\log(\bar{d}_j)$ vs. j bedeutet einen wichtigen Schritt in Richtung auf eine Objektivierung der durch den Algorithmus von Rosenstein ermittelten Lyapunov-Exponenten. Allerdings kommt auch das hier vorgeschlagene Verfahren nicht ohne die eher subjektive Festlegung von Parametern aus. So muss sowohl angegeben werden, welche kritische Korrelation als Minimalerfordernis für einen Skalierungsbereich anzusehen ist, als auch die Gewichtung der Länge eines Skalierungsbereiches im Bezug zu dessen Korrelation. Die entsprechenden Parameter lassen sich jedoch anhand von Testzeitreihen nach und nach anpassen und optimieren.

Literatur

- Abarbanel HDI, Brown R & Kadtke JB (1990) Prediction in Chaotic Nonlinear Systems: Methods for Series with Broadband Fourier Spectra. *Physical Review A*, 41, S. 1782-1807
- Argyris J & Andreadis I (1998) On the Influence of Noise on the Correlation Dimension of Chaotic Attractors. *Chaos, Solutions & Fractals*, 9 (3), S. 343-361
- Banbrook M, Ushaw G & McLaughlin S (1996) Lyapunov Exponents from a Time Series: a Noise-robust Extraction Algorithm. *Chaos, Solutions & Fractals*, 7 (7), S. 973-976
- Briggs K (1990) An Improved Method for Estimating Lyapunov Exponents of Chaotic Time Series. *Physical Letters A*, 151, S. 27-32
- Brown R, Bryant P & Abarbanel HDI (1991) Computing the Lyapunov Spectrum of a Dynamical System from Observed Time Series. *Physical Review A*, 43, S. 27-87
- Casdagli MC (1989) Nonlinear Prediction of Chaotic Time Series. *Physica D*, 35, S. 335-356
- Eckmann JP & Ruelle D (1985) Ergodic Theory of Chaos and Strange Attractors. *Review of Modern Physics*, 57 (3), S. 617-655
- Eckmann JP, Kamphorst SO, Ruelle D & Ciliberto S (1986) Liapunov Exponents from Time Series. *Physical Review A*, 34, S. 4971-4979
- Elbert T, Ray WJ, Kowalik ZJ, Skinner JE, Graf KE & Bierbaumer N (1994) Chaos and Physiology - Deterministic Chaos in Excitable Cell Assemblies. *Physiological Reviews*, 74, S. 1-47
- Ellner S, Gallant AR, McCaffrey D & Nychka D (1991) Convergence Rates and Data Requirements for Jacobian-Based Estimates of Lyapunov Exponents from Data. *Physical Letters A*, 153, S. 357-363
- Farmer JD & Sidorowich JJ (1987) Predicting Chaotic Time Series. *Physical Review Letters*, 59, S. 845-848
- Frank M, Blank HR, Heindl J, Kaltenhäuser M, Köchner H, Kreische W, Müller N & Poscher Sua (1993) Improvement of K2-Entropy Calculations by Means of Dimension Scaled Distances. *Physica D*, 65, S. 359-364
- Grassberger P & Procaccia I (1983a) On the Characterization of strange Attractors. *Physical Review Letters*, 50, S. 346-356
- Grassberger P & Procaccia I (1983b) Measuring the Strangeness of strange Attractors. *Physica D*, 9, S. 189-208
- Kantz H (1994) A Robust Method to Estimate Maximal Lyapunov Exponents of a Time Series. *Physical Letters A*, 185, S. 77-87
- Nicolis G & Prigogine I (1987) *Die Erforschung des Komplexen. Auf dem Weg zu einem neuen Verständnis der Naturwissenschaften*. Piper, München
- Raidl A (1998) Is Weather Chaotic. In: Zelinka I (Hrsg) *Perspective in Modern Prediction Methods*. S. 44-48
- Rosenstein MT, Collins JJ & De Luca CJ (1993) A Practical Method for Calculating Largest Lyapunov Exponents from Small Data Sets. *Physica D*, 65, S. 117
- Ruelle D & Takens F (1971) On the Nature of Turbulence. *Communications in Mathematical Physics*, 20, S. 167-192
- Sano M & Sawada Y (1985) Measurement of the Lyapunov Spectrum from a Chaotic Time Series. *Physical Review Letters*, 55 (10), S. 1082-1085

- Sato S, Sano M & Sawada Y (1987) Practical Methods of Measuring the Generalized Dimension and the Largest Lyapunov Exponent in High Dimensional Chaotic Systems. *Progress of Theoretical Physics*, 77 (1), S. 1-5
- Schiepek G & Strunk G (1994) *Dynamische Systeme. Grundlagen und Analysemethoden für Psychologen und Psychiater*. Asanger, Heidelberg
- Schuster HG (1989) *Deterministic Chaos*. VCH, Weinheim
- Seifritz W (1987) *Wachstum, Rückkopplung und Chaos*. Hanser, München
- Stoop R & Parisi J (1991) Calculation of Lyapunov Exponents Avoiding Spurious Elements. *Physica D*, 50, S. 89
- Vastano JA & Kostelich EJ (1986) Comparison of Algorithms for Determining Lyapunov-Exponents from Experimental Data. In: Mayer-Kress G (Hrsg) *Dimension and Entropies in Chaotic Systems*. Springer, Berlin, S. 100-107
- Wales DJ (1991) Calculating the Rate Loss of Information from Chaotic Time Series by Forecasting. *Nature*, 350, S. 485-488
- Wolf A, Swift JB, Swinney HL & Vastano JA (1985) Determining Lyapunov Exponents from a Time Series. *Physica D*, 16, S. 285-317
- Wright J (1984) Method for Calculating a Lyapunov Exponent. *Physical Review A*, 29, S. 2924-2927
- Zeng X, Eykholt R & Pielke RA (1991) Estimating the Lyapunov-Exponent Spectrum from Short Time Series of Low Precision. *Physical Review Letters*, 66, S. 3229