

Organisierte Komplexität

**Mikroprozess-Analysen der Interaktionsdynamik zweier
Psychotherapien mit den Methoden der nichtlinearen
Zeitreihenanalyse**

Inaugural-Dissertation
in der Fakultät Psychologie
der Otto-Friedrich-Universität Bamberg

vorgelegt von

Guido Strunk

aus

Dorsten

Bamberg, den 11.06.2004

Tag der mündlichen Prüfung: 19.01.2005

Dekan: Univ. Prof. Dr. Max Peter Baumann

Erstgutachter: Apl. Prof. Dr. Günter Schiepek

Zweitgutachter: Apl. Prof. Dr. Harald Schaub

8.2.4 Dimensionalität – Komplexität

Auf die Beziehung zwischen der geometrischen Struktur von seltsamen bzw. chaotischen Attraktoren im Phasenraum und den Dimensionalitätskonzepten von Mandelbrot wurde bereits hingewiesen. Tatsächlich gibt es Methoden, die versuchen die fraktale Dimensionalität von Attraktoren im Phasenraum zu ermitteln. Dabei können sich – genau wie bei fraktalen Dimensionen – größere Werte ergeben, als nach Maßgabe der topologischen Dimension des Attraktors zu erwarten wären. Zudem ergeben sich in der Regel keine ganzen Zahlen (vgl. S. 143ff. und S. 151ff.).

Die Dimensionalität eines Attraktors aufgerundet auf die nächste ganze Zahl entspricht der Anzahl der vom System realisierten Freiheitsgrade

Die Methoden zur Dimensionalitätsbestimmung auf der Grundlage empirischer Zeitreihendaten sind sehr rechenzeitintensiv und empfindlich gegenüber Zeitreihenlänge, Stationarität der Prozesse, Wahl einer idealen Phasenraumeinbettung und Rauschen. Die Informationen, die aus diesen Analysen über die zu Grunde liegenden Prozesse gewonnen werden können, rechtfertigen jedoch durchaus den Aufwand. So ist es möglich, aus nur einer Zeitreihe die Anzahl der Systemkomponenten zu schätzen, die mindestens benötigt werden, um die beobachtete Dynamik zu generieren. Die Dimensionalität eines Attraktors aufgerundet auf die nächste ganze Zahl entspricht der Anzahl der vom System *realisierten* Freiheitsgrade. Allgemein gibt die Dimensionalität eines Attraktors die Komplexität der Prozessdynamik an. In diesem Sinne ist es dann auch möglich die Komplexität verschiedener Prozesse miteinander zu vergleichen.

Zunächst soll der Grundgedanke der Dimensionalitätsbestimmung nach der am meisten verwendeten Methode, die von Grassberger und Procaccia (1983a, 1983b) vorgeschlagen wurde, beschrieben werden. Der Kern des Verfahrens wird durch das sog. Korrelationsintegral gebildet, welches gegeben ist durch:

**Gleichung 57:
Korrelationsintegral**

$$C(l) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{n^2} \sum_{i,j=1, i \neq j}^n \Theta \left(l - \left| \vec{X}_i - \vec{X}_j \right| \right) \right]. \quad (\text{vgl. Gleichung 51})$$

Das Korrelationsintegral sieht vor, dass alle möglichen Paare von Ortsvektoren auf ihre Distanz zueinander untersucht werden. Es wird also der euklidische Abstand zwischen jedem Punkt des Attraktors zu jedem anderen Punkt des Attraktors bestimmt. In der Gleichung 57 werden die zu untersuchenden Ortsvektoren mit \vec{X}_i bzw. mit \vec{X}_j bezeichnet. Jeder dieser Vektoren wird dabei von m Komponenten (mit m wird auch hier die Dimensionalität der gewählten Einbettung bezeichnet) in der folgenden Form gebildet:

$$\vec{X}_i = (x_{i,k=1}, x_{i,k=2}, \dots, x_{i,k=m}), \text{ bzw. für } j:$$

$$\vec{X}_j = (x_{j,k=1}, x_{j,k=2}, \dots, x_{j,k=m}).$$

Dabei wird hier abweichend von der üblichen Darstellung eines dreidimensionalen Ortsvektors mit der Hilfe von x -, y - und z -Komponenten jede Komponente mit x und die zugehörige Koordinaten-Achse mit dem Index k bezeichnet, da diese Darstellung auch die mathematische Behandlung höherdimensionaler Phasenräume erlaubt (Vorsicht: diese Darstellung beschreibt inhaltlich einen anderen Zusammenhang als Gleichung 47, S. 354 und darf daher nicht mit dieser verwechselt werden).

Da, wie oben bereits beschrieben, der euklidische Abstand d zweier Ortsvektoren und im m -dimensionalen Raum gegen ist durch:

Gleichung 58:
Abstand zwischen
Punkten im Phasen-
raum

$$d_{ij} = \sqrt{\sum_{k=1}^m (x_{i,k} - x_{j,k})^2}, \quad (\text{vgl. Gleichung 54})$$

lässt sich das Korrelationsintegral umschreiben zu:

Gleichung 59:
Korrelationsintegral

$$C(l) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{n^2} \sum_{i,j=1, i \neq j}^n \Theta(l - d_{ij}) \right].$$

Bei Θ handelt es sich um eine Heaviside-Funktion, die den Wert Eins annimmt, für die Bedingung, dass d_{ij} kleiner ist als l , während sie den Wert Null annimmt, wenn dies nicht der Fall ist. Für eine gegebene Einbettung einer Zeitreihe mit Zeitverzögerungskoodinaten und einem gegebenen τ im m -dimensionalen Raum, zählt das Korrelationsintegral also wieviele Abstände zwischen allen möglichen Punktepaaren kleiner sind als die mit l gegebene Größe und relativiert diese Zahl mit n^2 auf die Anzahl möglicher Abstände überhaupt.

Die Gleichung lässt sich relativ einfach als Computerprogramm implementieren, indem alle Abstände zwischen allen Punkten (außer mit sich selbst) ermittelt und mit aufsteigender Größe sortiert werden. Die Position eines $l = d_{ij}$ in der sortierten Liste gibt dann sofort an, wieviele Abstände d_{ij} zwischen den Punkten des Attraktors kleiner sind. Wird diese Anzahl durch n^2 geteilt, so ist $C(l)$ für alle l leicht berechnet.

**Ein geeigneter Skalierungs-
bereich wird
häufig nach Augen-
maß bestimmt**

Nun ist die Korrelationsdimension (D2) jedoch erst gegeben durch die lineare Steigung einer Geraden im Plot von $\log(C(l))$ vs. $\log(l)$. Nicht immer lässt sich eine solche lineare Steigung mit Sicherheit identifizieren. Wenn sie vorliegt, dann zeigt sie sich in der Regel nicht im Verlauf des gesamten Wertebereiches von $\log(l)$, sondern nur in einem mehr oder weniger schmalen Ausschnitt des Funktionsbereiches von $\log(C(l))$ vs. $\log(l)$ als gute Approximation (vgl. die folgende Abbildung 103). Die Identifikation dieses so genannten *Skalierungsbereiches* bildet einen durchaus problematischen Analyseschritt im Rahmen der Bestimmung der Korrelationsdimension. Nicht selten wird der Skalierungsbereich nur nach Augenmaß festgelegt. Die Güte der Anpassung einer Gerade an den Plot von $\log(C(l))$ vs. $\log(l)$ kann noch relativ einfach über z.B. Korrelationskoeffizienten bestimmt werden, die Identifikation des Skalierungsbereiches selbst ist hingegen durchaus komplex. Wenn der Skalierungsbereich, z.B. durch eine Erweiterung des Verfahrens zum PD2 (vgl. S. 373ff.), für eine einzige Analyse mehrfach bestimmt werden muss, kommt man um die automatisierte Eingrenzung des linearen Bereiches nicht mehr umhin.

Vorschläge in diese Richtung liegen z.B. von Babloyantz und Destexhe (1987) vor. Ausgangspunkt ihres Algorithmus ist die Berechnung des so genannten *Slope*. Der *Slope* der Funktion von $\log(C(l))$ vs. $\log(l)$ bildet die Änderung der Steigung über $\log(l)$ ab. Er stellt also die erste Ableitung von $\log(C(l))$ nach $\log(l)$ dar (vgl. die folgende Abbildung 103).

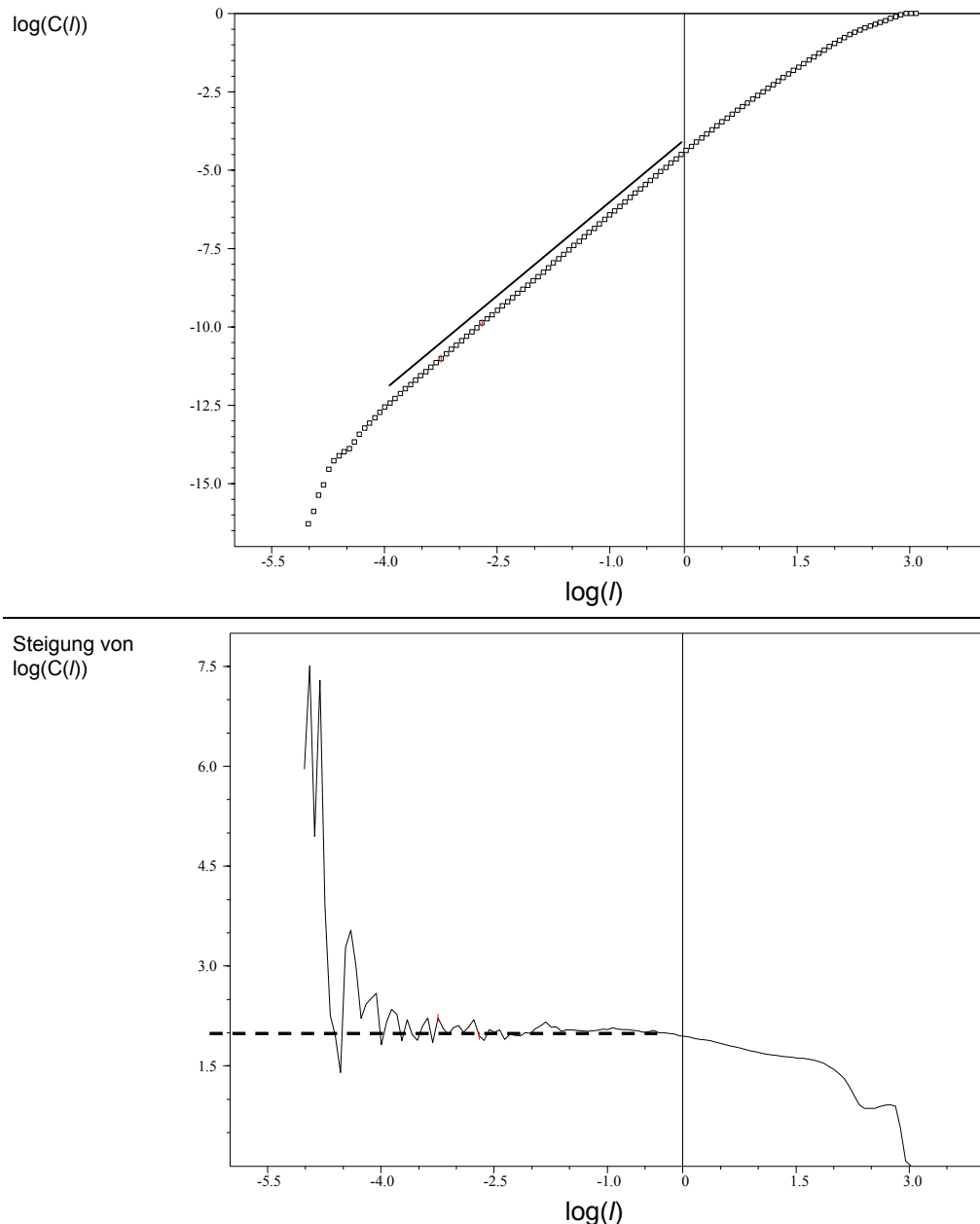


Abbildung 103: Korrelationsintegral in Abhängigkeit von l

Oben: Die doppelt logarithmische Darstellung zeigt, wie bei wachsendem l auch das Korrelationsintegral wächst. Im markierten Bereich ist die Steigung von $\log(C(l))$ vs. $\log(l)$ linear. Dieser Bereich wird Skalierungsbereich genannt. Unten: Der Slope des Korrelationsintegrals ergibt sich, indem die Steigung jeweils aufeinander folgender Punkte des Plot aus $\log(C(l))$ vs. $\log(l)$ bestimmt wird. Die gestrichelte Linie geht durch den Skalierungsbereich und entspricht der mittleren Steigung in diesem Bereich. Ihr Wert ist das D2 für die gewählte Einbettungsdimension.

Die in der Abbildung dargestellte Berechnung ergibt sich für den Lorenz-Attraktor (vgl. Gleichung 27, S. 289) mit $r = 29,00$; $\sigma = 10,00$ und $b = 2,66667$. Im Rahmen der Berechnung der Zeitreihe wurden Zeitschritte im Abstand von 0,005 gewählt und nur jeder fünfte Datenpunkt registriert. Erzeugt wurden 9.800 Messzeitpunkte. Die Berechnung des D2 erfolgte für eine dreidimensionale Einbettung. Das Time-Lag wurde mit Hilfe der Mutual-Information ermittelt.

Im Skalierungsbereich verändert sich der *Slope* nicht so dramatisch, wie außerhalb des Skalierungsbereiches und verläuft im Idealfall parallel zur Abszisse. Aufbauend auf diesen Beobachtungen schlagen Babloyantz und Destexhe (1987) eine

Möglichkeit vor, den Mittelpunkt des Skalierungsbereiches zu bestimmen. Obwohl das von ihnen beschriebene Verfahren durchaus plausibel erscheint, führte es bei der Erprobung im Rahmen der vorliegenden Arbeit zu fehlerhaften Ergebnissen, so dass hier ein eigener Algorithmus entwickelt wurde, der den Skalierungsbereich nach und nach immer mehr einkreist. Insgesamt geht der Algorithmus in fünf Schritten vor:

1. Von links (niedriges $\log(l)$) nach rechts (hohes $\log(l)$) werden sukzessive alle Steigungen des *Slope* ausgeschlossen, bis zum ersten Mal eine Verringerung der Steigung eintritt. Auch von rechts nach links voranschreitend werden sukzessive alle Steigungen ausgeschlossen, bis zum ersten Mal eine Verringerung der Steigung eintritt. Sollte durch diesen Schritt kein zusammenhängender Bereich mehr definiert werden können (die Ausschlüsse überlappen einander), wird der Schritt ausgelassen.
2. Im bisher definierten Bereich wird nun die zweite Ableitung von $\log(C(l))$ nach $\log(l)$ berechnet, also die sich jeweils für aufeinanderfolgende Werte des *Slope* ergebende Veränderung bestimmt. Im Skalierungsbereich sollte sich der *Slope* nur mehr geringfügig ändern, so dass die zweite Ableitung Werte nahe Null einnehmen sollte.
3. Von links nach rechts werden sukzessive alle Veränderungen des *Slope* ausgeschlossen, die größer als Eins sind. Da solche dramatischen Veränderungen nur am linken Ende des *Slope* zu erwarten sind, wird auf ein entsprechendes Vorgehen am rechten Ende verzichtet.
4. Für den so eingegrenzten und von groben Ausreißern befreiten Bereich wird nun der mittlere *Slope* (*AMS*) und die mittlere Abweichung (*AB*) von diesem Mittelwert bestimmt. Registriert wird dabei der Betrag der Abweichung vom Mittelwert. Um den Mittelwert wird mit Hilfe der mittleren Abweichung ein Intervall ($AMS - AB$ bis $AMS + AB$) gebildet.
5. Im bisher definierten Bereich wird nun der größte zusammenhängende (also nicht durch Ausreißer unterbrochene) Abschnitt des *Slope* gesucht, dessen Werte innerhalb des definierten Intervalls liegen. Dieser Bereich, sofern einer existiert, stellt den gesuchten Skalierungsbereich dar. Die Güte der Anpassung einer Gerade an den Plot von $\log(C(l))$ vs. $\log(l)$ im Skalierungsbereich wird in der Folge über den Korrelationskoeffizienten bestimmt.

Das Verfahren wurde mit verschiedenen Beispielsystemen ausführlich auf seine Zuverlässigkeit getestet. Insgesamt führt es zu relativ schmalere Skalierungsbereichen, als sie sich per Augenschein ergeben würden. Es hat sich als hilfreich herausgestellt den Skalierungsbereich zunächst für verschiedene Einbettungsdimensionen zu bestimmen und dann die Berechnungen mit einem fixen Skalierungsbereich zu wiederholen. Dieser ergibt sich zwischen der insgesamt geringsten unteren Grenze für $\log(l)$ und der insgesamt größten oberen Grenze für $\log(l)$ der Skalierungsbereiche der verschiedenen Einbettungsdimensionen.

Immer dann, wenn die Bestimmung eines Skalierungsbereiches möglich ist, kann die Steigung der Geraden für $\log(C(l))$ vs. $\log(l)$ als gute Schätzung für die Korrelationsdimension bei einer gegebenen Einbettungsdimension gelten. Probleme bei der Bestimmung des Skalierungsbereiches können sich z.B. durch verrauschte Daten oder ein fehlerhaft gewähltes Time-Lag ergeben. Aber auch dann, wenn eine Korrelationsdimension für eine bestimmte Einbettungsdimension ermittelt

werden kann, setzt ihre Interpretation als D2-Schätzung voraus, dass der Wert auch für die passende Einbettungsdimension bestimmt wurde. Da diese für empirische Daten in der Regel nicht a priori bekannt ist, muss die D2-Berechnung für verschieden hohe Einbettungsdimensionen m mit $m = 1, 2, 3, 4, \dots, M$ wiederholt werden.

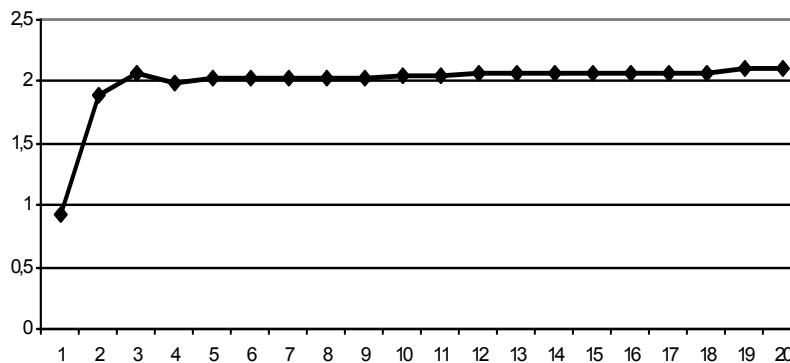


Abbildung 104: D2 bei wachsender Einbettungsdimension

Mit wachsender Einbettungsdimension steigt der Wert für das D2 zunächst an, bis sich eine Sättigung zeigt. Für die bereits in Abbildung 103 genutzten Daten kann in guter Näherung bereits ab drei Dimensionen eine Sättigung beobachtet werden. Es ergibt sich ein $D2 = 2,05$ ($\pm 0,045$). In der Literatur wird für das Lorenz-System eine Dimensionalität von 2,06 angegeben (z.B. Argyris & Andreadis 1998b).

Die Werte des D2 müssen sich bei steigender Einbettung einem festen Wert annähern

Der Plot der für jede Einbettungsdimension berechneten Korrelationsdimension aufgetragen gegenüber der Einbettungsdimension m beschreibt im Idealfall eine logarithmische Form. D.h., dass mit steigendem m zunächst auch das D2 steigt, dann aber eine Sättigung eintritt, die dazu führt, dass sich das D2 nicht mehr erhöht, wenn m erhöht wird (vgl. Abbildung 104). Ohne viel Aufwand kann die Sättigung über eine lineare Regression durch die D2-Werte der höchsten Einbettungsdimensionen bestimmt werden. Zeigt sich hier eine positive Steigung, die einen bestimmten vorher festgelegten Grenzwert überschreitet, so liegt keine Sättigung vor.

Steigt das D2 stetig mit wachsender Einbettungsdimension unvermindert weiter, ist das ein Hinweis auf einen stochastischen Prozess. Eine unendlich lange Zeitreihe vorausgesetzt, würde ein reiner Zufallsprozess jeweils exakt den D2-Wert ergeben, der als Einbettungsdimension gewählt wird, unabhängig von der Höhe der jeweiligen Einbettungsdimension. Es würde jeweils der gesamte Phasenraum „bis ins letzte Eck“ vom Zufallsrauschen gefüllt werden. Praktisch gesättigt auch ein Zufallsprozess bei sehr hohen Einbettungsdimensionen, da die Länge der Zeitreihen begrenzt sind. Der Phasenraum kann dann nicht mehr vollständig gefüllt werden.

Die Anforderungen an die Länge der Zeitreihe sind sehr hoch

Ein kritischer Aspekt bei der Berechnung des D2 nach dem beschriebenen Verfahren stellt daher die Länge der Zeitreihen dar. Viele, sich häufig widersprechende Faustregeln fordern relativ lange – im Idealfall unendlich lange – Zeitreihen. Das höchste D2, das mit einer gegebenen Zeitreihenlänge n ermittelt werden kann, beläuft sich z.B. nach Jedynek, Bach und Timmer (1993) auf:

$$D2_{\max} \leq 2 \log_{10} n.$$

Kann vermutet werden, dass der untersuchte Attraktor mehr Dimensionen aufweist, so muss eine entsprechend längere Zeitreihe ermittelt werden (Jedynak, Bach & Timmer 1993). Nerenberg und Essex (1990) verweisen auf weit strengere Kriterien. Das Minimum an Messpunkten für eine Genauigkeit des D2 in einem 95%-tigen Konfidenzintervall, geben sie nach folgender Regel an:

$$n_{\min} \approx 10^{2+0,4D_{\text{Einbettung}}}$$

Wird eine maximale Einbettung von sechs Dimensionen gewählt, werden über 25.000 Datenpunkte nötig, während nach der von Jedynak, Bach und Timmer (1993) vorgeschlagenen Faustregel ca. 1.000 Datenpunkte ausreichen würden (Nerenberg & Essex 1990). Allgemein führen zu kurze Zeitreihen zu einer Unterschätzung der tatsächlichen Dimensionalität, während zu lange zu Überschätzungen führen. Eine andere Faustregel wird von Seitz et al. (1992) genannt. Diese bestimmt eine minimal benötigte Zeitreihenlänge n_{\min} über die Auflösung b der Zeitreihe und der angestrebten Einbettungsdimension m , nach folgender Beziehung:

$$n_{\min} \geq b^m.$$

Für die Hénon-Zeitreihe mit einem bekannten $D2 = 1,25$ kommen sie bei einem $b = 10$ (die Auflösung wird hier verstanden als Anzahl von disjunkten Abschnitten des Wertebereiches, die noch in der Lage sind, die Dynamik abzubilden) und einem $m = 2$ mit nur 100 Datenpunkten aus. Für $b = 6$ konnte von ihnen auch bei 10.000 Datenpunkten für die Hénon-Map kein Skalierungsbereich mehr gefunden werden (Seitz et al. 1992). Vor dem Hintergrund, dass in der Psychologie häufig Ratingskalen mit ähnlich begrenzter Auflösung Verwendung finden, sollten diese Ergebnisse als Aufforderung für höher auflösende Verfahren verstanden werden. Eine typische fünfstufige Likert-Skala ist hier sicherlich zu grob.

Nach einer weiteren Faustregel (Farmer 1982) werden für die Ermittlung der Dimensionalität nach der vorgestellten Methode Einbettungsdimensionen von $2 \cdot (D2) + 1$ benötigt. Allerdings kann in der Regel davon ausgegangen werden, dass die Anzahl der Einbettungsdimensionen, die über dem wahren Wert des D2 hinaus gebraucht werden keine so große Verlängerung der Zeitreihe fordern, wie es für die Anzahl der tatsächlichen Dimensionen der Fall ist.

Unter anderem kommt es darauf an, die „richtige“ Zeitreihe zu untersuchen

Insgesamt muss leider festgestellt werden, dass die angegebenen Faustregeln nicht nur jeweils sehr unterschiedliche Anforderungen an die Länge der zu untersuchenden Zeitreihen stellen. Zudem können die mit Hilfe von Modellzeitreihen erprobten Forderungen immer nur für diese Modelldaten Gültigkeit beanspruchen. In Abhängigkeit von verschiedenen Faktoren, wie Rauschanteil, Komplexität der Dynamik, Range und Auflösung der Daten, ergibt sich dann erst im Einzelfall, wie lang die Zeitreihen tatsächlich sein müssen damit ein zufriedenstellendes Ergebnis ermittelt werden kann. Lorenz (1991) gelang es 17 Dimensionen mit nur 4.000 Messpunkten relativ reliabel zu bestimmen, wobei er zeigen konnte, dass nicht alle Variablen des von ihm untersuchten Modell-Systems so genaue Berechnungen zuließen. Im Einklang mit der oben bereits angeführten Argumentation (siehe S. 353) kann angenommen werden, dass bestimmte, stark mit den anderen Variablen gekoppelte Größen wegen ihrer starken Involviertheit ins System weit genauere Ergebnisse liefern als andere, eher am Rande des Systems stehende Variablen (vgl. Tsonis 1992, S. 170; Lorenz 1991).

**Messfehlerrauschen
führt zu Problemen
bei der Berechnung
des D2**

Ein weiterer Einflussfaktor auf die Verlässlichkeit der Dimensionalitätsschätzungen ergibt sich, auch bei genügend langen Zeitreihen, aus Messfehlern. Messfehlerrauschen kann dazu führen, dass sich entweder keine Skalierungsregion finden lässt und/oder keine Sättigung der Dimensionalität bei steigenden Einbettungsdimensionen festgestellt werden kann. Viele Testreihen mit bekannten Dynamiken konnten diese Probleme zum Teil schon für geringe Rauschanteile nachweisen (z.B. Seitz et al. 1992). Dies ist der Grund warum sich in der Literatur eine große Anzahl mehr oder minder erfolgreicher Methoden finden lässt, die dazu dienen soll die vorgestellten Algorithmen gegenüber Rauschen robust zu halten (vgl. z.B. Kantz & Schürmann 1996, Nolte, Ziehe & Müller 2001). Im Allgemeinen kann Messfehlerrauschen entweder dazu führen, dass das D2 nicht mehr bestimmt werden kann oder Kennwerte ermittelt werden, die signifikant über dem Wert liegen, der sich für die entsprechende rauschfreie Zeitreihe ergeben würde (Argyris & Andreadis 1998a, 1998b).

Tsonis (1992) kritisiert an der gängigen Auswertungspraxis, dass Rauschfilterungsverfahren noch zu wenig benutzt würden. Er führt daher mehrere Möglichkeiten von Rauschfilterungen an, die angeblich zu keiner Manipulation des mit dem Rauschen überlagerten Signals führen. Dazu gehören vor allem Verfahren des so genannten *Shadowing*, mit denen versucht wird, aus verrauschten bzw. zu kurzen Zeitreihen genügend Informationen zu gewinnen, um daraus eine künstliche Zeitreihe zu rekonstruieren, die wie ein Schatten den gegebenen Werten möglichst genau folgt. Dimensionalität und andere chaosrelevante Kennwerte könnten dann für das *Shadow* berechnet werden (siehe dazu ausführlicher S. 335f.). Insgesamt empfiehlt es sich so weit wie möglich sowohl auf Methoden zur Rauschfilterung, als auch auf Methoden des *Shadowing* zu verzichten. Insbesondere von gezielt auf bestimmte Frequenzbereiche ausgelegten Rauschfiltern, wie sie in der Signalverarbeitung gerne eingesetzt werden, ist bei chaotischen Zeitsignalen abzuraten. Bei hoch komplexen chaotischen Strukturen kann eine Trennung zwischen Signal und Rauschen eben kaum mehr über einfache Methoden erreicht werden. Dort wo dennoch nicht auf eine Rauschfilterung verzichtet werden kann, empfiehlt es sich mit Breitbandfiltern, wie z.B. dem gleitenden arithmetischen Mittel (vgl. S. 333f.) zu arbeiten oder gezielt die nichtlinearen Methoden des *Shadowing* anzuwenden.

**Nichtstationäre Zeit-
reihen**

Eine besondere Herausforderung für eine verlässliche Dimensionalitätsschätzung ergibt sich durch nichtstationäre Zeitreihen. Während lineare Trends in der Regel keine Rolle spielen, können schon leichte im Laufe der Zeit eintretende Veränderungen im Frequenzspektrum der Zeitreihe zu Berechnungsfehlern führen. Noch weit größere Probleme bereiten Zeitreihen, die als nicht stationär in Bezug auf ihre Attraktoreigenschaften angesehen werden müssen. Wechselt ein System während seiner Beobachtung sein Verhalten (Phasenübergang), so bildet die Phasenraumeinbettung mehrere ineinander verschlungene Attraktoren des Systems ab (eine Darstellung von Methoden zur Identifikation von Nichtstationarität findet sich bei Gao 2001). Wenn dann überhaupt ein D2 bestimmbar ist, so muss es sich dabei um eine Art Mittelwert über die verschiedenen Attraktoren handeln. Lange Beobachtungszeiten und Beobachtungen von Prozessen, für die a priori Veränderungen erwartet werden können (wie z.B. für psychotherapeutische Prozesse) eignen sich im allgemeinen nicht für eine Dimensionalitätsanalyse, wie sie hier beschrieben wurde.

Das Konzept der Pointwise Dimensionalität (PD2) erlaubt es nichtstationäre Prozesse zu analysieren

Es sind aber Methoden vorgeschlagen worden, die den ursprünglichen Grundgedanken von Grassberger und Procaccia (1983a, 1983b) beibehaltend, leichte Veränderungen im Ablauf der Auswertung vornehmen. So wird häufig nicht erst nach Ermittlung aller Distanzen zwischen allen Punkten des Attraktors der Skalierungsbereich und damit das D2 bestimmt, vielmehr ergibt sich das D2 erst als Mittelwert aus mehreren Einzelberechnungen (sog. Pointwise Dimensionalität, oder PD2). Ausgehend von einzelnen Referenzpunkten werden dabei zunächst die Distanzen zu allen anderen Punkten ermittelt und daraus, einzeln für jeden der Referenzpunkte nach der bekannten Methode ein D2 bestimmt, welches jedoch nur für diesen Referenzpunkt gilt. Ein Mittelwert über viele Referenzpunkte nähert sich stark dem D2 an und kann schon für wenige Datenpunkte (die Anforderungen sind weitaus geringer als beim D2 aber auch hier sind mehrere Hundert bis Tausend Datenpunkte nötig um für niedrigdimensionale Systeme sinnvolle Berechnungsergebnisse zu erhalten) relativ gut bestimmt werden. In der Regel zeigt der Median der Pointwise Dimensionalität (PD2) eine noch einmal bessere Schätzung für die Dimensionalität der gesamten Zeitreihe. Zudem lässt sich zeigen, dass die Methode nicht so empfindlich gegenüber Rauschen und Nichtstationarität ist (vgl. z.B. Babloyantz & Destexhe 1987). Skinner (1992) schlägt vor, Referenzpunkte für die kein Skalierungsbereich ermittelt werden kann oder für die es keinen Sättigungsbereich gibt, aus der Berechnung auszuschließen (vgl. hierzu auch Kantz & Schürmann 1996). Dazu wählt er zunächst jeden Punkt nacheinander zum Referenzpunkt und eliminiert die, die unzureichende Ergebnisse liefern.

Die Dimensionsschätzungen einzelner Referenzpunkte lassen sich bei diesem Verfahren als lokale Dimensionalität interpretieren. Damit eröffnet sich die Möglichkeit, Veränderungen in der Dimensionalität eines Attraktors im zeitlichen Verlauf zu ermitteln. Dies konnte Skinner realisieren, indem er durch Aneinanderreihung mehrerer bekannter Dynamiken (Sinusschwingungen verschiedener Frequenzen und Amplituden, Lorenz-Dynamik, Hénon-Dynamik) eine künstliche Zeitreihe bildete und diese mit seiner PD2-Methode untersuchte (Kowalik & Elbert 1994, Skinner, Molnar & Tomberg 1994). Das PD2 war in der Lage, die korrekten Dimensionalitätswerte für die verschiedenen Abschnitte zu ermitteln (Skinner 1992). Einschränkend muss allerdings darauf hingewiesen werden, dass um eine für alle Zeitreihenabschnitte passende Phasenraumeinbettung zu erhalten, die Samplingfrequenz der einzelnen Dynamiken so gewählt wurde, dass für alle das gleiche Time-Lag τ zur Bestimmung der Zeitverzögerungskordinaten resultierte. Dies ist bei empirischen Daten nicht immer möglich. Als Voraussetzung für die Interpretierbarkeit eines PD2 nennt Skinner außerdem den Grenzwert von mindestens 75% an Referenzpunkten, die nicht aus der Berechnung ausgeschlossen werden. Die folgende Abbildung 105 zeigt das PD2 für eine synthetisierte Zeitreihe, die auf der Grundlage der Verhulst-Gleichung mit unterschiedlichen Parameterwerten generiert wurde.

Da für die meisten psychologischen Prozesse mit Lerneffekten oder ähnlichen Veränderungen in der Dynamik gerechnet werden kann, eine Veränderung der Systemdynamik in vielen Fällen sogar angestrebt wird, erscheint die Berechnung eines PD2 weit sinnvoller als die globale Bestimmung einer Dimensionalität mittels des D2-Algorithmus (vgl. zur Interpretation von Dimensionalitätsmaßen auch den empirischen Teil dieser Arbeit, S. 563ff.). Zwingend erforderlich ist bei der Berechnung des PD2 jedoch ein Verfahren zur automatischen Bestimmung des Skalierungsbereiches (vgl. S. 369).

Literatur

- Argyris J & Andreadis I (1998a) On the Influence of Noise on the Correlation Dimension of Chaotic Attractors. *Chaos, Solutions & Fractals*, 9 (3), S. 343-361
- Argyris J & Andreadis I (1998b) On the Influence of Noise on the Largest Lyapunov Exponent and on the Geometric Structure of Attractors. *Chaos, Solutions & Fractals*, 9 (9), S. 947-958
- Babloyantz A & Destexhe A (1987) Strange Attractors in Human Cortex. In: Rensing L, Heiden Uad & Mackey MC (Hrsg) *Temporal Disorders in Human Oscillatory Systems*. Springer, Berlin, S. 48-57
- Farmer JD (1982) Chaotic Attractors in an Infinite-Dimensional Dynamical System. *Physica D*, 4 (3), S. 366-393
- Gao JB (2001) Detecting Nonstationarity and State Transitions in a Time Series. *Physical Review E*, 63, S. 066202-1-066202-8
- Grassberger P & Procaccia I (1983a) On the Characterization of strange Attractors. *Physical Review Letters*, 50, S. 346-356
- Grassberger P & Procaccia I (1983b) Measuring the Strangeness of strange Attractors. *Physica D*, 9, S. 189-208
- Jedynak A, Bach M & Timmer J (1993) Failure of Dimension Analysis in a Simple Five-Dimensional System. *Physical Review E*, 50, S. 1770-1780
- Kantz H & Schürmann T (1996) Enlarged Scaling Ranges for the KS-Entropy and the Information Dimension. *Chaos*, 6 (2), S. 167-171
- Kowalik ZJ & Elbert T (1994) Changes of Chaoticness in Spontaneous EEG/MEG. *Integrative Physiological and Behavioral Science*, 29 (3), S. 270-282
- Lorenz EN (1991) Dimension of Weather and Climate Attractors. *Nature*, 353, S. 241-242
- Nerenberg MAH & Essex C (1990) Correlation Dimension and Systematic Geometric Effects. *Physical Review A*, 42, S. 7065-7074
- Nolte G, Ziehe A & Müller K-R (2001) Noise Robust Estimates of Correlation Dimension and K2 Entropy. *Physical Review E*, 64 (1), S. 16112-16121
- Seitz A, Tschacher W, Ackermann K & Revensdorf D (1992) Applicability of Dimension Analysis to Data in Psychology. In: Tschacher W, Schiepek G & Brunner EJ (Hrsg) *Self-Organization and Clinical Psychology*. Springer, Berlin, S. 367-384
- Skinner JE (1992) *The Point-D2 Algorithm*. Baylor College of Medicine, Houston
- Skinner JE, Molnar M & Tomberg C (1994) The Point Correlation Dimension: Performance with Nonstationary Surrogate Data and Noise. *Integrative Physiological and Behavioral Science*, 29, S. 217-234
- Tsonis AA (1992) *Chaos: From Theory to Applications*. Plenum Press, New York